CLUBUL MATEMATICIENILOR

Marius PERIANU • Cătălin STĂNICĂ
Ioan BALICA • Cătălin MÎINESCU • Cristian LAZĂR

Matematică pentru EVALUAREA NAȚIONALĂ

Scanned with OKEN Scanner

Marius **PERIANU** • Cătălin **STĂNICĂ**
Ioan **BALICA** • Cătălin **MÎINESCU** • Cristian **LAZĂR**

Matematică

pentru

Evaluarea Națională

2013

Teme, probleme şi teste de verificare

ART
Grup Editorial

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CLUBUL MATEMATICIENILOR

Clubul matematicienilor este un proiect dezvoltat de Grupul Editorial Art.

Copyright © 2012

ART Grup Editorial

Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin editurii.
Reproducerea integrală sau parţială a conţinutului lucrării
este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii.

Referenţi ştiinţifici:
prof. gr. I Mircea Cornel Popescu
prof. gr. I Daniela Ivan
prof. gr. I Cristina Ritzi

Tehnoredactare:
Cornel Drăghia

Coperta:
Alexandru Daş

Descrierea CIP este disponibilă la Biblioteca Naţională a României

Pentru **comenzi** vă puteţi adresa:

Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, Cod: 062650, sector 6, Bucureşti

telefon
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870
Se acordă importante **reduceri**.

Tipărit la C.N.I. „CORESI" S.A.

Cuprins

Partea 1. Aritmetică/Algebră

Tema 1.1. Numere naturale. Operaţii cu numere naturale (clasa a V-a) 7

Tema 1.2. Numere întregi (clasa a VI-a) 13

Tema 1.3. Divizibilitate (clasele V-VI) 16

Tema 1.4. Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale (clasele V-VI-VII) 25

Tema 1.5. Rapoarte. Proporţii. Procente. Probabilităţi (clasele VI-VII) 33

Tema 1.6. Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali (clasele VII-VIII) 42

Tema 1.7. Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori (clasele VII-VIII) 49

Tema 1.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere (clasa a VIII-a) 54

Tema 1.9. Funcţii (clasa a VIII-a) 61

Tema 1.10. Ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, al inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii (clasele V-VI-VII-VIII) 67

Partea 2. Geometrie

Tema 2.1. Unghiuri. Triunghiuri (clasa a VI-a) 75

Tema 2.2. Patrulatere (clasa a VII-a) 83

Tema 2.3. Asemănare (clasa a VII-a) 90

Tema 2.4. Relaţii metrice (clasa a VII-a) 98

Tema 2.5. Cercul (clasa a VII-a) 104

Tema 2.6. Incidenţă, paralelism şi perpendicularitate în spaţiu (clasa a VIII-a) 110

Tema 2.7. Corpuri geometrice. Arii şi volume (clasa a VIII-a) 122

Partea 3. Variante de subiecte

3.1. Subiecte date la Evaluarea Naţională în anii 2010 – 2012 129

3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare 146

Soluţii 194

Scanned with OKEN Scanner

Aritmetică / Algebră
Clasele V-VIII

1

Tema 1.1. Numere naturale. Operaţii cu numere naturale
(clasa a V-a)

Tema 1.2. Numere întregi
(clasa a VI-a)

Tema 1.3. Divizibilitate
(clasele V-VI)

Tema 1.4. Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale
(clasele V-VI-VII)

Tema 1.5. Rapoarte. Proporţii. Procente. Probabilităţi
(clasele VI-VII)

Tema 1.6. Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali
(clasele VII-VIII)

Tema 1.7. Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori
(clasele VII-VIII)

Tema 1.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere
(clasa a VIII-a)

Tema 1.9. Funcţii
(clasa a VIII-a)

Tema 1.10. Ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, al inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii
(clasele V-VI-VII-VIII)

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.1

Numere naturale. Operații cu numere naturale

Mulțimea $\{0,1,2,3,4,...\}$ a numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

Mulțimea $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ este mulțimea numerelor naturale nenule; ea se notează cu $\mathbb{N}^*$.

Cu numerele naturale putem efectua următoarele operații:

- operații de ordinul I: adunarea și scăderea;
- operații de ordinul II: înmulțirea și împărțirea;
- operații de ordinul III: ridicarea la putere.

Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor naturale

a. Comutativitatea: pentru orice numere naturale a și b avem: $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$.

b. Asociativitatea: pentru orice numere naturale a, b, c avem: $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{cases}$.

c. 0 este element neutru la adunare: $a+0=0+a=a$, pentru orice număr natural a.
1 este element neutru la înmulțire: $a\cdot 1=1\cdot a=a$, pentru orice număr natural a.

d. Înmulțirea este distributivă față de adunare și față de scădere: $\begin{cases} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \end{cases}$.

Operațiile cu numere naturale și relațiile de egalitate/inegalitate

1. Fiind dată o egalitate $a=b$ între două numere naturale, egalitatea se păstrează dacă:

a. în ambii membri se adună același număr natural: $a=b\Rightarrow a+c=b+c$;

b. din ambii membri se scade același număr natural: $a=b\Rightarrow a-c=b-c$;

c. ambii membri se înmulțesc cu același număr natural: $a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$;

d. ambii membri se împart la același număr natural nenul: $a=b\Rightarrow a:c=b:c$.

2. Adunând sau înmulțind membru cu membru două egalități, egalitatea se păstrează:

dacă $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ atunci $\begin{cases} a+c=b+d \\ a\cdot c=b\cdot d \end{cases}$.

3. Fiind dată o inegalitate $a\le b$ între două numere naturale, inegalitatea se păstrează dacă:

a. în ambii membri se adună același număr natural: $a\le b\Rightarrow a+c\le b+c$;

b. din ambii membri se scade același număr natural: $a\le b\Rightarrow a-c\le b-c$;

c. ambii membri se înmulțesc cu același număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$;

d. ambii membri se împart la același număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a:c\le b:c$.

Teorema împărțirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a și b, cu $b\neq 0$, există numerele naturale q și r, unic determinate, astfel încât: $a=b\cdot q+r$ și $0\le r<b$.

Numărul q se numește *câtul împărțirii*, iar numărul r se numește *rest*.

Exemplu. Fiind date numerele 23 și 5, există și sunt unice numerele naturale 4 și 3 astfel încât să avem: $23=4\cdot 5+3$ și $3<5$. Deci $23:5=4$ rest 3.

Scanned with OKEN Scanner

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Fie a şi n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numeşte puterea a n-a a numărului natural a şi se notează a^n.

Scrierea a^n se citeşte „a la puterea n" sau „puterea a n-a a numărului a". În această scriere, a se numeşte *baza* puterii, iar n se numeşte *exponentul* puterii.

Aşadar: $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, şi, în general, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$, pentru $n \geq 2$.

Prin convenţie, $a^1 = a$ şi $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural se numesc *pătrate perfecte.*

Exemple. 81 şi 225 sunt pătrate perfecte, pentru că $81 = 9^2$ şi $225 = 15^2$.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc *cuburi perfecte.*

Exemple. 27, 125 şi 64 sunt cuburi perfecte, întrucât $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $64 = 4^3$.

Ultima cifră a puterii unui număr natural. Deoarece ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, avem:

1. Numerele care se termină cu cifrele 0, 1, 5, 6, ridicate la orice putere nenulă, se vor termina cu aceleaşi cifre.
2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2:
   a. puterile impare ale numerelor terminate în 4 se termină în 4, iar puterile pare nenule se termină în 6;
   b. puterile impare ale numerelor terminate în 9 se termină în 9, iar puterile pare nenule se termină în 1.
3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8, se repetă din 4 în 4.

Reguli de calcul cu puteri. Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$.

1. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Împărţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $m \geq n$
3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \vdots b$.

Observaţie. Sunt situaţii în care identităţile de mai sus se folosesc şi sub forma:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ 2. $a^{m-n} = a^m : a^n$ 3. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ - regula de înmulţire a puterilor cu acelaşi exponent
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$ - regula de împărţire a puterilor cu acelaşi exponent

Ordinea efectuării operaţiilor

1. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de acelaşi ordin acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Pentru a uşura calculul, putem folosi proprietăţile de comutativitate şi asociativitate ale adunării şi înmulţirii:

Exemple. a. $27 + 15 - 32 = 42 - 32 = 10$. b. $32 \cdot 5 : 8 \cdot 2 = 160 : 8 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$.
c. $137 + 455 + 63 + 45 = (137 + 63) + (455 + 45) = 200 + 500 = 700$.
d. $4 \cdot 231 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 231 = 100 \cdot 231 = 23\,100$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă într-un exercițiu sunt operații de ordine diferite se efectuează, dacă există, mai întâi operațiile de ordinul trei, apoi operațiile de ordinul doi și, în final, operațiile de ordinul întâi, respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $24:2^3\cdot 5=24:8\cdot 5=3\cdot 5=15.$

b. $340:17+(5^4)^3:5^{10}-700:35=340:17+5^{12}:5^{10}-700:35=$
$=340:17+5^2-700:35=340:17+25-700:35=20+25-20=25.$

3. Dacă într-un exercițiu există și paranteze, se efectuează mai întâi toate operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (dacă există) și în final din acolade (dacă există) și în final ce avem în afara acoladelor (dacă există), respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $(38+275:25)\cdot 10-34\cdot 11=(38+11)\cdot 10-374=49\cdot 10-374=116.$

b. $40\cdot\left[100:4+5\cdot(3^2+48048:24)\right]+2011=$

Calculăm paranteza rotundă: $3^2+48048:24=9+2002=2011.$

Calculăm paranteza dreaptă: $100:4+5\cdot 2011=25+10055=10080.$

Reconstituim exercițiul: $40\cdot 10080+2011=403200+2011=405211.$

Factoriale. Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „*n factorial*". Prin convenție, $0!=1$.

Exemple. $2!=1\cdot 2=2,\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6,\ 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\ 5!=120,\ 7!=5040.$

Suma primelor *n* numere naturale nenule. Sume Gauss

Teoremă. Pentru orice număr natural $n\geq 1$ are loc egalitatea:

$$\boxed{1+2+\ldots+n=n(n+1):2.}$$

Într-adevăr, notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$S=1+\ 2\ +\ 3\ +\ \ldots+(n-1)+n$

$S=n+(n-1)+(n-2)+\ \ldots\ +\ 2\ +1$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$2S=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(n-1+2)+(n+1),$

adică $2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n\text{ paranteze}}=n(n+1)$, de unde rezultă $S=n(n+1):2$.

La fel putem proceda pentru a calcula suma unor numere care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al sumei, unde $r\neq 0$ este un număr natural dat.

Exemplu. Calculați suma $S=20+23+26+\ldots+254+257$.

Mai întâi aflăm numărul de termeni ai sumei (cu ***metoda contorului***). Termenii sumei sunt din 3 în 3 și, observând că $20=3\cdot\mathbf{6}+2,\ 23=3\cdot\mathbf{7}+2\ldots,\ 257=3\cdot\mathbf{85}+2$, rezultă că numărul termenilor sumei este egal cu numărul de numere naturale de la 6 la 85, adică $85-6+1=80$.

Scriem suma cu termenii așezați în ordine crescătoare, apoi, sub ea, aceeași sumă, cu termenii așezați în ordine descrescătoare, după care adunăm termen cu termen.

$S=\ 20\ +\ 23\ +26+\ldots+254+257$

$S=257+254+251+\ldots+\ 23\ +\ 20$

$2S=\underbrace{277+277+277+\ldots+277+277}_{\text{80 termeni (numărul termenilor sumei } S)}=80\cdot 277=22160,$ deci $S=22160:2=11080.$

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Scrierea numărului trei sute de mii opt este egală cu ... .
2. Cel mai mic număr natural de trei cifre cu cifra zecilor 7 este egal cu ... .
3. Aproximarea lui 345672 prin lipsă, la mii este egală cu ... .
4. Dintre numerele $a=102030$, $b=123450$ şi $c=102100$ mai mare este ... .
5. Cel mai mic număr natural cu produsul cifrelor 12 este egal cu ... .
6. Secvența 3, 6, 9, 12, ..., 33 conține un număr de ... numere naturale.
7. Numărul numerelor naturale impare de forma $\overline{a2b}$ este egal cu ... .
8. Dacă pe axa numerelor sunt reprezentate punctele $O(0), A(11), B(7)$ şi $C(23)$, atunci ordinea punctelor O, A, B, C pe axă este ... .
9. Rezultatul calculului $19027+9278$ este egal cu ... .
10. Rezultatul calculului $1006-297$ este egal cu ... .
11. Rezultatul calculului $208\cdot 17$ este egal cu ... .
12. Rezultatul calculului $12-4\cdot 2+3$ este egal cu ... .
13. Dacă $ab+ac=15$ şi $b+c=5$, atunci valoarea numărului a este egală cu ... .
14. Rezultatul calculului $5+10+15+...+40$ este egal cu ... .
15. Suma a trei numere naturale consecutive este 21. Produsul numerelor este egal cu ... .
16. Numărul zerourilor în care se termină produsul primelor 21 de numere naturale nenule este egal cu ... .
17. Rezultatul calculului 1^4+2^0 este egal cu ... .
18. Numărul pătratelor perfecte din secvența 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 este egal cu ... .
19. Ultima cifră a numărului 2^{2013} este egală cu ... .
20. Dacă $1+3+5+...+13=x^2$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ... .
21. Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu ... .
22. Dintre numerele $a=2^{33}$ şi $b=3^{22}$, mai mic este numărul ... .
23. Dintre numerele $x=2^{55}$, $y=2^{33}$ şi $z=2^{44}$, cub perfect este numărul ... ..
24. Dacă $2^6\cdot 4^7\cdot 8^8=2^x$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu ... .
25. Numărul natural care împărțit la 17 dă câtul 9 şi restul 15 este egal cu ... .
26. Suma resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 5 este egală cu ... .
27. Suma a două numere naturale este 32. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 5 şi restul 2. Numărul mai mic este egal cu ... .
28. Numărul numerelor naturale care împărțite la 4 dau câtul 3 este egal cu ... .
29. Un număr natural n dă restul 3 la împărțirea cu 4. Restul împărțirii numărului n la 2 este egal cu ... .
30. Numărul care împărțit la 7 dă câtul 9 şi restul 5 este egal cu ... .

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

31. Se știe că $a+b+c=7$. Calculați:
a) $2a+2b+2c$; *b)* $10a+10b+10c$; *c)* $a\cdot 13+b\cdot 13+c\cdot 13+21$.

32. Se știe că $a=11$ și $b+c=8$. Calculați:
a) $ab+ac$; *b)* $2a+3b+3c$; *c)* $10a+9b+9c$;
d) $ab+ac+25$; *e)* $ab+ac-34$; *f)* $7b+7c+9a$;

33. Se știe că $a+b+c=23$ și $x=9$. Calculați:
a) $14a+14b+14c+14x$; *b)* $2013-(53a+53b+53c+10x)$;
c) $349+6a+6b+6c-12x$; *d)* $424-21x+3a+3b+3c$;

34. Calculați, scoțând factor comun:
a) $13\cdot 5+13\cdot 21+13\cdot 40$; *b)* $437\cdot 109-437\cdot 54+437\cdot 203$;
c) $49\cdot 135-49\cdot 27+49\cdot 11$; *d)* $2011\cdot 5+2011\cdot 7+2011\cdot 49+2011\cdot 39$;

35. Dacă $x=5$ și $a+b=13$, calculați:
a) $3\cdot x+7\cdot a+7\cdot b$; *b)* $xa+xb-50$;
c) $10\cdot x-(4\cdot a+4\cdot b)$; *d)* $(4a+4b-2x)\cdot(2a+2b+x)$.

36. Calculați numărul x știind că $a-b=6$ și:
a) $x+3\cdot a-3\cdot b=20$; *b)* $x\cdot a-x\cdot b+9a-9b=654$;
c) $7\cdot a-7\cdot b+x=55$; *d)* $13+x-(5\cdot a-5\cdot b)=2011$.

37. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a+b+c=57$ și $2a+b+2c=73$, calculați $(a+c)\cdot(5\cdot a+2\cdot b+5\cdot c)$.

38. *a)* Dacă $a+b=20$ și $b+c=30$, calculați $3a+7b+4c$.
b) Dacă $a+b=33$ și $a+c=11$, calculați $5a+3b+2c$.

39. Știind că $x+3y=2y+z=14$, calculați:
a) $x+5y+z$; *b)* $3x+15y+3z$; *c)* $5x+11y-2z$; *d)* $5x+19y+2z$.

40. Produsul a două numere este 672. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 992. Determinați cele două numere.

41. Produsul a două numere este 1530. Micșorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 850. Determinați cele două numere.

42. Produsul a trei numere consecutive este cu 48 mai mare decât produsul primelor două. Determinați cele trei numere naturale.

43. Efectuați:
a) $11+8\cdot\{45+4\cdot[3+8\cdot(12\cdot 13-8\cdot 14)-37]\}+1234$;
b) $(32\cdot 15-32\cdot 5)+11\cdot 12+7\cdot\{124-5\cdot[210-2\cdot(23\cdot 17-24\cdot 12)]\}$;
c) $12+12\cdot\{12+12\cdot[12+12\cdot(12\cdot 12-122)]\}+12\cdot 12$;
d) $[100-3\cdot(13\cdot 19-12\cdot 18)]\cdot\{1+2\cdot[3+4\cdot(5+6\cdot 7)]\}$;
e) $2483-23\cdot[15+5\cdot(127-119)]+32\cdot[178-5\cdot(345-328)]$;
f) $\{[19\cdot 6-107+12\cdot 8]\cdot 2-176\}+[5467-16\cdot(324-319)]$.

44. *a)* Determinați numerele naturale n, pentru care $8^n+8^{n+1}=18\cdot 2^{2003}$.
b) Determinați numerele naturale n, pentru care $9^n+9^{n+1}=10\cdot 3^{2012}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinați numerele naturale n, pentru care $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{55}$.
d) Determinați numerele naturale n, pentru care $7^{n+1} + 7^{n+2} = 8 \cdot 7^{11}$.

45. *a)* Arătați că numărul $a = 2003 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2002)$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2011$ este pătrat perfect.
c) Arătați că numărul $a = 81 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 81 + \ldots + 49 \cdot 81$ este pătrat perfect.

46. *a)* Câte pătrate perfecte se găsesc între numerele 100 și 1000 ?
b) Câte numere naturale pătrate perfecte se află între 2000 și 3000?

47. Arătați că numerele naturale, de forma $5 \cdot (n + 1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n.

48. Un număr natural este de 7 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 86 și mai mic decât 94?

49. Un număr natural este de 9 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 149?

50. Un număr natural este de 13 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 155?

51. *a)* Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul 103.
c) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 32.

52. Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.

53. Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați numerele.

54. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.

55. *a)* Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 7 dau restul egal cu câtul.
b) Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.

56. Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărțind a la b obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe b la c obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.

57. Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.

58. Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.

59. Suma a două numere naturale este 334. Împărțind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obținem câtul 36 și restul 7. Determinați numerele.

60. Diferența a două numere naturale este 149. Împărțind numărul mai mare la jumătatea numărului mai mic obținem câtul 16 și restul 9. Determinați numerele.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.2
Numere întregi

Numerele întregi pozitive, numerele întregi negative şi numărul 0 formează *mulţimea numerelor întregi*. Pentru scrierea acesteia se foloseşte simbolul $\mathbb{Z}$.

Avem $\mathbb{Z}=\{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$ sau $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,...\}$.

Observaţii

1. Numărul 0 nu este pozitiv şi nici negativ.
2. Numerele întregi negative sunt folosite pentru a descrie temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheţ, adâncimi sub nivelul mării, datorii etc.
3. Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale: $1=+1$; $2=+2$; $3=+3$ etc. Putem scrie aceasta printr-o relaţie între mulţimi $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}^*$.

Opusul unui număr întreg. În general, dacă n este un număr natural nenul, atunci:

- opusul numărului întreg pozitiv $+n$ este numărul întreg negativ $-n$.
- opusul numărului întreg negativ $-n$ este numărul întreg pozitiv $+n$.

Opusul numărului 0 este tot numărul 0, deoarece $+0=-0=0$. Opusul unui număr întreg x (fie pozitiv fie negativ) se notează cu $-x$.

Modul. *Valoarea absolută* sau *modulul* unui număr întreg a este distanţa de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează cu $|a|$.

1. Modulul unui număr pozitiv p este egal cu numărul însuşi: $|p|=p$.
2. Modulul unui număr negativ $-n$, $n\in\mathbb{N}$, este egal cu opusul său: $|-n|=-(-n)=+n$.
3. $|a|\geq 0$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $a=0$.

Exemple: **a.** $|+3|=3$; **b.** $|-4|=4$; **c.** $|0|=0$.

Operaţii cu numere întregi

Operaţiile cu numere naturale se prelungesc la mulţimea numerelor întregi, ţinând cont de următoarele reguli:

Adunarea
a. Suma a două numere întregi cu acelaşi semn este numărul întreg care are:
- modulul egal cu suma modulelor termenilor;
- acelaşi semn ca termenii sumei.

b. Suma a două numere întregi cu semne diferite este numărul întreg care are:
- modulul egal cu modulul diferenţei modulelor termenilor;
- semnul egal cu semnul termenului mai mare în modul.

c. Suma a două numere întregi opuse este 0.

Scăderea Diferenţa a două numere întregi este egală cu suma dintre primul termen şi opusul celui de-al doilea.

Înmulţirea Produsul a două numere întregi este numărul întreg care are:
- modulul egal cu produsul modulelor factorilor;
- semnul „+” dacă factorii au acelaşi semn şi semnul „–” dacă factorii au semne contrare.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Opusul numărului întreg $a = 5 - 7$ este ... .

2. Un număr întreg pozitiv se numește ... .

3. Suma $3 + (-7) + (-10)$ este egală cu ... .

4. Numărul întreg mai mare ca -5 și mai mic decât -3 este egal cu ... .

5. Se știe că $a = -13$, $b = 13$, $c = 27$. Atunci $a - b + c$ este egal cu ... .

6. Se știe că $m = 11, n = -7, p = 13$. Atunci $m + 2n - 3p$ este egal cu ... .

7. Rezultatul calculului $(-5) \cdot (+12) : (-10)$ este egal cu ... .

8. Primul număr întreg mai mic decât -11 este egal cu ... .

9. Succesorul numărului întreg -28 este ... .

10. Predecesorul numărului întreg $+11$ este ... .

11. Rezultatul calculului $(-2)^3 \cdot (-4)^2 : (-2)^5$ este ... .

12. Numărul întreg $a = (-9)^7 \cdot 3^{10} : (-3)^{17}$ este egal cu ... .

13. Se știe că $b = [13 + (-8 + 10)] : (-5)$. Atunci $2 \cdot b$ este egal cu ... .

14. Dacă $n = (-2)^6 \cdot [-3 + (15 - 4)] : 2^8$, atunci n este egal cu ... .

15. Se știe că $5 < n < 7$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci $-2n + 6$ este egal cu ... .

16. Dacă $a = (-1)^{n^2+3n}, n \in \mathbb{N}$, atunci $-10 \cdot a$ este egal cu ... .

17. Soluția ecuației $2x + 17 = -3x + 7$ este reprezentată de numărul întreg ... .

18. Cel mai mare număr întreg, soluție a inecuației $5x - 10 < -2x + (-24)$, este ... .

19. Cel mai mic număr întreg, soluție a inecuației $7x - 11 \geq -3x - 19$, este ... .

20. Numărul de numere întregi ce verifică $5 < 3x - 15 \leq 23$, este ...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Numerele întregi a și b au raportul 3 și suma -16. Determinați numerele a și b.

22. Să se calculeze $a + (-3) \cdot b$, unde $a = 13 - (-15)$ și $b = 21 : (-7)$.

23. Știind că $m = (-18) : (-6)$, $n = (-7) \cdot 2$, să se calculeze $3 \cdot m - 5 \cdot n$.

24. Calculați $(-1)^{10} + (-1)^{11} + ... + (-1)^{20}$.

25. Calculați $(-1)^1 - (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 + (-1)^5$.

26. Să se compare numerele întregi $(-2)^{30}$ și $(-3)^{20}$.

Scanned with OKEN Scanner

27. Să se determine numărul de numere întregi mai mari decât -11 şi mai mici decât 13.

28. Să se calculeze suma tuturor numerelor întregi mai mari sau egale cu -11 şi mai mici decât 15.

29. Comparaţi numerele întregi $(-3)^{21}$ şi $(-2)^{35}$.

30. Să se determine valoarea numărului $a = 1-2+3-4+...+21-22$.

31. Calculaţi $(-2)^{21} : 4^{10} + 3^{10} : (-9)^3 - (-5)^{11} : 25^5$.

32. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -13 < x \leq 19\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.
b) Să se calculeze suma tuturor elementelor mulţimii A.

33. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq 2x+3 < 20\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.
b) Să se calculeze suma elementelor mulţimii A.

34. Să se determine toate numerele întregi n care verifică $|2n+1| = 7$.

35. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x| < 21\}$. Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.

36. Să se rezolve ecuaţia $|3x-1| + (-12) = 14$, ştiind că $x \in \mathbb{Z}$.

37. Să se determine cel mai mic număr întreg pozitiv care este soluţie pentru inecuaţia $|2x+3| \geq 12$.

38. Să se determine toate perechile de numere întregi (x,y), ştiind că $5xy + 2y = 14$.

39. Să se rezolve ecuaţia $x+3x+5x+...+13x = -490$, ştiind că $x \in \mathbb{Z}$.

40. Să se demonstreze că ecuaţia $(3x+2)\cdot(5y+3) = 9$ nu are soluţii întregi.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.3
Divizibilitate

Divizibilitate. Numărul natural a se divide (este divizibil) cu numărul natural b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Pentru a nota relația de divizibilitate, vom scrie într-unul din modurile:

- $a \vdots b$ care se citește „a se divide cu b“ sau „a este multiplu al lui b“;
- $b \mid a$ care se citește „b divide a“ sau „b este un divizor al lui a“.

a este divizibil cu b	b divide pe a	a este produsul factorilor b și c
$a \vdots b$	$b \mid a$	$a = b \cdot c$
multiplu divizor	divizor multiplu	multiplu divizor divizor

Observații.

1. Alte simboluri folosite sunt: $\nmid$ (citim „nu se divide cu“) și $\nmid$ (citim „nu divide“).
2. Dacă a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci a este divizibil cu b, dacă restul împărțirii lui a la b este egal cu zero.
3. Numărul natural 0 este divizibil cu orice număr natural, iar 0 divide doar pe 0.

Exemple: **1.** $24 \vdots 8$, deoarece $24 = 8 \cdot 3$. **2.** $3 \mid 15$, deoarece $15 = 3 \cdot 5$.

3. $119 \vdots 7$, deoarece $119 : 7 = 17$, rest 0.

4. $2415 \nmid 13$, deoarece $2415 : 13 = 185$, rest 10.

Divizori improprii. Divizori proprii. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Numerele 1 și a se numesc divizori *improprii* ai numărului a. Ceilalți divizori ai lui a (dacă există) se numesc divizori *proprii*.

Deoarece orice număr natural este divizor al numărul natural 0, iar numărul natural 1 are un singur divizor, și anume pe 1, nu se pune problema existenței divizorilor proprii, respectiv improprii, pentru numerele 0 și 1.

Exemplu: Divizorii improprii ai lui 10 sunt 1 și 10, iar divizorii proprii sunt 2 și 5.

Mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n este mulțimea D_n a tuturor numerelor naturale care divid pe n. Se notează: $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid n \vdots d\}$.

Mulțimea multiplilor naturali ai numărului natural n este mulțimea tuturor numerelor naturale care se divid cu n. Se notează: $M_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \vdots n\}$.

Exemple: $D_{14} = \{1,2,7,14\}$; $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$; $D_3 = \{1,3\}$;

$M_3 = \{0,3,6,9,...\}$; $M_{12} = \{0,12,24,36,...\}$;.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, atunci D_n este o mulțime finită, iar M_n este o mulțime infinită. Pentru $n = 0$ avem $D_0 = \mathbb{N}$ și $M_0 = \{0\}$.

Numere prime. Un număr natural care are exact doi divizori se numește număr *prim*.

Cu alte cuvinte, un număr natural $p \geq 2$ este prim dacă și numai dacă singurii săi divizori sunt 1 și p.

Scanned with OKEN Scanner

Numerele prime până la 100 sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. *Singurul număr prim par este* 2.

Numere compuse. Un număr natural, mai mare decât 1, care are cel puţin trei divizori, se numeşte *număr compus*. Altfel spus, un număr natural este compus dacă are cel puţin un divizor propriu.

Exemple: Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ... sunt numere compuse.

Observaţii:

1. Numerele naturale 0 şi 1 nu sunt nici prime şi nici compuse.
3. Pentru a verifica dacă un număr natural este prim, procedăm astfel:
   a. împărţim pe rând numărul dat la numerele prime luate în ordine crescătoare (sau verificăm dacă e divizibil cu ele folosind criteriile de divizibilitate) până când câtul împărţirii devine mai mic decât împărţitorul;
   b. dacă nici una dintre împărţiri nu s-a efectuat exact, atunci numărul este prim;
   c. dacă la una dintre împărţiri restul este zero, atunci numărul este compus iar împărţitorul şi câtul sunt divizori ai săi.

Exemple: 1. Numărul 37 este prim: $37 \not\vdots 2$; $37 \not\vdots 3$; $37 \not\vdots 5$; $37 \not\vdots 7$.

2. Numărul 121 este compus, pentru că admite pe 11 ca divizor propriu:
   $121 \not\vdots 2$; $121 \not\vdots 3$; $121 \not\vdots 5$; $121 \not\vdots 7$; $121 = 11 \cdot 11$

Criterii de divizibilitate

Un criteriu de divizibilitate este o regulă prin care se poate decide dacă numărul natural a este divizibil sau nu cu numărul natural nenul b, fără a efectua împărţirea lui a la b.

Criteriul de divizibilitate cu 10. Un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0.

Criteriul de divizibilitate cu 10^k. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Un număr natural de cel puţin $k+1$ cifre este divizibil cu 10^k dacă şi numai dacă ultimele sale k cifre sunt egale cu 0.

Cu alte cuvinte, un număr natural este divizibil cu 100 (1000, 10000 etc.), dacă şi numai dacă ultimele sale două (trei, patru etc.) cifre sunt egale cu 0.

Observaţie. Restul împărţirii unui număr natural n la 10 este egal cu ultima cifră a lui n. Analog, numărul format de ultimele două (trei, patru etc.) cifre ale lui n reprezintă restul împărţirii lui n la 100 (1000, 10000 etc.).

Criteriul de divizibilitate cu 2, respectiv cu 5. Un număr natural este divizibil cu 2, respectiv cu 5, dacă şi numai dacă ultima sa cifră este divizibilă cu 2, respectiv cu 5.

Criteriul de divizibilitate cu 4, respectiv cu 25. Un număr natural este divizibil cu 4, respectiv cu 25, dacă şi numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 4, respectiv cu 25.

Notând cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n, iar cu $\overline{zu}(n)$ numărul format de ultimele două cifre ale lui n, rezultă că:

1. $n \vdots 2 \Leftrightarrow u(n) \in \{0,2,4,6,8\}$
2. $n \vdots 5 \Leftrightarrow u(n) \in \{0,5\}$
3. $n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00,04,08,12,16,...,96\}$
4. $n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{zu}(n) \in \{00,25,50,75\}$

Criteriul de divizibilitate cu 3, respectiv cu 9. Un număr natural este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

1. $\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \vdots 3$
2. $\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 9 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \vdots 9$

Scanned with OKEN Scanner

Observații privind restul împărțirii unui număr natural la 2, 3, 4, 5, 9, 25

1. Restul împărțirii unui număr natural n la 2, respectiv la 5 este egal cu restul împărțirii la 2, respectiv la 5, a ultimei cifre a lui n.
2. Restul împărțirii unui număr natural n la 4, respectiv la 25, este egal cu restul împărțirii la 4, respectiv la 25, a numărului format de ultimele două cifre ale lui n.
3. Restul împărțirii unui număr natural n la 3, respectiv la 9, este egal cu restul împărțirii la 3, respectiv la 9, a sumei cifrelor numărului n.

Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

1. Pentru orice număr natural a au loc relațiile $a \vdots 1$ și $0 \vdots a$.
2. **Reflexivitatea.** Orice număr natural a se divide cu el însuși: $a \vdots a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.
3. **Antisimetria.** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ au proprietatea că $a \vdots b$ și $b \vdots a$, atunci $a = b$.
4. **Tranzitivitatea.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ au proprietatea că $a \vdots b$ și $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$.
5. **Divizibilitatea produsului**
   a. Produsul a două numere naturale este divizibil cu fiecare factor al produsului.
   $a \cdot b \vdots a$ și $a \cdot b \vdots b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$.
   b. Dacă numărul natural a este divizibil cu numărul natural b, atunci orice multiplu al lui a este divizibil cu b.
   dacă $a \vdots b$, atunci $a \cdot c \vdots b$, oricare ar fi $c \in \mathbb{N}$.
   c. Dacă a, b, m, n sunt numere naturale astfel încât a este divizibil cu m și b este divizibil cu n, atunci produsul ab este divizibil cu produsul mn.
   dacă $a \vdots m$ și $b \vdots n$, atunci $a \cdot b \vdots m \cdot n$.
6. **Divizibilitatea sumei/diferenței**
   a. Dacă numerele naturale a și b, cu $a \geq b$, sunt divizibile cu numărul natural d, atunci suma și diferența lor sunt divizibile cu d
   dacă $a \vdots d$ și $b \vdots d$, atunci $a+b \vdots d$ și $a-b \vdots d$
   b. Dacă fiecare dintre termenii unei expresii care conține sume și/sau diferențe este divizibil cu numărul natural d, atunci expresia este divizibilă cu d.
   c. Dacă fiecare termen al unei expresii care conține sume și/sau diferențe, cu excepția unuia singur, este divizibil cu d, atunci expresia nu este divizibilă cu d.

Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi

Teorema fundamentală a aritmeticii. Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de puteri de numere prime.

Făcând abstracție de ordinea factorilor, descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime este unică.

Exemple: $8 = 2^3$; $10 = 2 \cdot 5$; $28 = 2^2 \cdot 7$; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $999 = 3^3 \cdot 37$.

Numărul divizorilor naturali ai unui număr natural compus este egal cu produsul succesorilor exponenților puterilor ce apar în descompunerea în produs de puteri de numere prime. Altfel spus, numărul divizorilor naturali ai numărului $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ este $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1)$.

Exemple: 1. $27 = 3^3 \Rightarrow \text{card}\, D_{27} = 3+1 = 4$, adică 27 are 4 divizori.

2. $28 = 2^2 \cdot 7^1$, deci numărul divizorilor lui 28 este $(2+1) \cdot (1+1) = 6$.
Într-adevăr, $D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$, deci $\text{card}\, D_{28} = 6$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Pentru a determina divizorii unui număr natural putem proceda astfel: un număr ce admite o descompunere în produs de puteri de numere prime de forma $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ va avea ca divizori toate numerele ale căror descompuneri în produs de puteri de numere prime au forma $a^x \cdot b^y \cdot c^z$, cu $0 \le x \le m$, $0 \le y \le n$, $0 \le x \le p$.

Exemplu: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Divizorii lui 36 sunt: $1, 2, 3, 2^2, 3^2, 2\cdot3, 2\cdot3^2, 2^2\cdot3, 2^2\cdot3^2$.

Cel mai mare divizor comun

Date fiind două sau mai multe numere naturale, nu toate nule, mulțimea divizorilor comuni este nevidă, deoarece conține cel puțin un element, și anume pe 1.

Definiție. Numărul natural d este *cel mai mare divizor comun* al numerelor naturale a și b, nu ambele nule, dacă satisface simultan condițiile:

a) d divide pe a și d divide pe b;

b) d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a și b.

Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b se notează c.m.m.d.c.(a,b) sau (a,b).

$$(a,b) = d \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} d|a \text{ și } d|b \\ \text{dacă } i|a \text{ și } i|b, \text{atunci } i|d \end{cases}$$

Observații.

1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 0 și $a \in \mathbb{N}^*$ este a.
2. Dacă $a,b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \mid b$, atunci $(a,b) = a$.
3. În mod asemănător se poate defini și noțiunea de cel mai mare divizor comun a trei sau mai multe numere naturale, nu toate nule.
4. Mulțimea divizorilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulțimea divizorilor celui mai mare divizor comun al acestora.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.
2. Cel mai mare divizor comun este produsul *factorilor primi comuni*, luați *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mic* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{matrix} 336 = 2^4\cdot3\cdot7 \\ 360 = 2^3\cdot3^2\cdot5 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ c.m.m.d.c.$(336,360) = 2^3\cdot3 = 24$.

Numere prime între ele. Două numere naturale a și b se numesc *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1.

Două numere prime între ele se mai numesc și *relativ prime* sau *coprime*.

Observații. 1. Două numere prime diferite sunt prime intre ele.

2. Două numere prime între ele nu sunt neapărat numere prime.

Exemplu. $\left.\begin{matrix} 24 = 2^3\cdot3 \\ 35 = 5\cdot7 \end{matrix}\right| \Rightarrow (24,35) = 1 \Rightarrow$ 24 și 35 sunt *prime între ele*.

Aplicații privind cel mai mare divizor comun

1. Fie a și b două numere naturale nenule și d cel mai mare divizor comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x și y, astfel încât $a = dx$ și $b = dy$.
2. Dacă un număr natural d se divide cu două numere naturale a și b, ce sunt prime între ele, atunci d se divide și cu produsul lor.
3. Dacă mai multe numere naturale a, b, c se divid cu același număr natural, nenul i, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c se divide cu i.

Scanned with OKEN Scanner

4. **Teorema lui Gauss.** Dacă produsul numerelor naturale a şi b se divide cu numărul natural i, iar a şi i sunt numere prime între ele, atunci b se divide cu i.

Cel mai mic multiplu comun

Mulţimea multiplilor unui număr natural, nenul este infinită. Mulţimea multiplilor comuni a două numere naturale, nenule, este şi ea infinită, deoarece conţine cel puţin produsul numerelor şi toţi multiplii acestuia.

Definiţie. Numărul natural m este *cel mai mic multiplu comun* al numerelor naturale a şi b dacă satisface simultan condiţiile:

a) m este divizibil cu a şi b;

b) orice alt multiplu al numerelor a şi b este divizibil cu m.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b se notează c.m.m.m.c.$[a,b]$ sau $[a,b]$.

$$[a,b]=m \text{ dacă şi numai dacă } \begin{cases} a|m \text{ şi } b|m \\ \text{dacă } a|M \text{ şi } b|M, \text{atunci } m|M \end{cases}$$

Observaţii

1. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 0 şi $a \in \mathbb{N}$ este 0: $[0,a]=0$.
2. Dacă $a,b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a|b$, atunci $[a,b]=b$.
3. În mod asemănător se poate defini şi noţiunea de cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multe numere naturale.
4. Mulţimea multiplilor comuni a mai multor numere date coincide cu mulţimea multiplilor celui mai mic multiplu comun al acestora.

Comentariu. Fiind date două numere naturale nenule a şi b, se observă că, deşi 0 este un multiplu comun al numerelor a şi b, el nu este şi *cel mai mic multiplu comun* al lor, deoarece nu este îndeplinită a doua condiţie din definiţia c.m.m.m.c.

Într-adevăr, presupunând că $[a,b]=0$, cum produsul ab este multiplu comun al lui a şi b, ar rezulta $ab \vdots 0$, fals.

Algoritm pentru determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime.
2. Cel mai mic multiplu comun este produsul *factorilor primi comuni şi necomuni*, luaţi *o singură dată*, cu *exponentul cel mai mare* care apare în descompunerile numerelor date.

Exemplu: $\left.\begin{matrix} 336=2^4\cdot 3\cdot 7 \\ 360=2^3\cdot 3^2\cdot 5 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ c.m.m.m.c.$[336,360]=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=5040$.

Aplicaţii privind cel mai mic multiplu comun

1. Fie a şi b două numere naturale nenule şi m cel mai mic multiplu comun al lor. Atunci există numerele naturale prime între ele x şi y, astfel încât $m=ax$ şi $m=by$.
2. Dacă un număr natural n se divide cu două numere naturale a şi b, atunci n se divide şi cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.
3. **Legătura dintre c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c.** Produsul dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b este egal cu $a\cdot b$.

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b, \text{ pentru orice } a,b\in\mathbb{N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Ca şi în cazul numerelor naturale, spunem că a divide pe b, şi scriem $a \mid b$, dacă există numărul $c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b = a \cdot c$. Numărul a se numeşte divizor al lui b, iar b se numeşte multiplu de a.

Observaţii:

1. Dacă $a \mid b$, atunci $-a \mid b$, $a \mid -b$ şi, mai general, $\pm a \mid \pm b$.
   Exemplu: $2 \mid 20$ deoarece există $10 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $20 = 2 \cdot 10$, dar şi $-2 \mid 20$, deoarece există numărul întreg -10 astfel încât $20 = (-2) \cdot (-10)$.
2. Spre deosebire de mulţimea $\mathbb{N}$, în care relaţia de divizibilitate este antisimetrică, adică „din $a \mid b$ şi $b \mid a$, atunci $a = b$“, în $\mathbb{Z}$ relaţia de divizibilitate nu este antisimetrică.
   Mai precis, avem $a \mid b$ şi $b \mid a$ dacă şi numai dacă $|a| = |b|$, sau, altfel spus, $a = \pm b$.
   Exemplu: $5 \mid (-5)$ şi $(-5) \mid 5 \Rightarrow 5 = -(-5)$.
3. Dacă în $\mathbb{N}$ un număr nenul a are n divizori, atunci în $\mathbb{Z}$ numărul a are $2n$ divizori.
   Exemplu: În $\mathbb{N}$, $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, iar în $\mathbb{Z}$ avem $D_8 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$.
4. Dacă în $\mathbb{N}$ mulţimea multiplilor numărului a este $M_a = \{0, a, 2a, 3a, ...\}$, atunci în $\mathbb{Z}$ avem $M_a = \{0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...\}$.
   Exemplu: În $\mathbb{N}$ avem $M_7 = \{0, 7, 14, 21, ...\}$, iar în $\mathbb{Z}$ avem $M_7 = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, ...\}$.
5. Un număr întreg p este prim, dacă numărul natural $|p|$ este prim.
   Exemplu: Numerele prime în $\mathbb{Z}$: $5, -3, 7, -11$.
6. Numerele întregi -1, 0, 1 nu sunt nici prime şi nici neprime (compuse).
7. Proprietăţile divizibilităţii în $\mathbb{N}$ rămân valabile şi în $\mathbb{Z}$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Divizorii naturali ai numărului 12 sunt ....
2. Multiplii lui 7 mai mici decât 30 sunt ....
3. Dintre numerele 121; 143 şi 243, divizibil cu 3 este numărul ....
4. Cel mai mare divizor comun al numerelor 120 şi 150 este egal cu ....
5. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 şi 25 este egal cu ....
6. Numărul numerelor de forma $\overline{xy}$ divizibile cu 10 este egal cu ....
7. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{24x}$ divizibil cu 2 este ....
8. Dacă numărul $\overline{xy}$ este divizibil cu 9 şi $x - y = 1$, atunci numărul $\overline{xy}$ este egal cu ....
9. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{26x}$ divizibil cu 3 este egal cu ....
10. Dacă $A = D_{30}$ şi $B = M_2$, atunci $A \cap B = ...$
11. Cel mai mic număr natural de forma $\overline{abab}$, $a \neq b$, cu cel mai mic număr de divizori este egal cu ....
12. Numărul divizorilor naturali ai numărului 320 este egal cu ....

Scanned with OKEN Scanner

13. Un număr natural împărțit la 60 dă restul 45. Restul împărțirii aceluiași număr natural la 15 este egal cu ....

14. Dacă $\left(\overline{1ab}+\overline{ab}\right):31$, atunci valoarea expresiei $a+b$ este egală cu .... sau cu ....

15. Descompunerea în produs de puteri de numere prime a numărului 420 este ....

16. Suma a două numere prime este 39. Produsul celor două numere este egal cu ....

17. Dintre numerele 12^{36} și 36^{12} mai mulți divizori are numărul ....

18. Valoarea de adevăr a propoziției "15 și 38 sunt prime între ele" este ....

19. Cel mai mare multiplu comun al numerelor 30 și 20, mai mic decât 150 este ....

20. Dacă $a+3b=9$ și a este număr prim, atunci valoarea numărului natural b este egală cu ....

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. ***a)*** Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{18}{x+3}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

b) Determinați mulțimea $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{9}{x+3}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$.

c) Determinați mulțimea $C=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{3x+2}{2x+3}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

22. ***a)*** Știind că $(a;b)=9$ și $[a;b]=72$, determinați toate perechile de numere a și b.

b) Știind că $(a;b)=12$ și $5a+2b=384$, determinați toate perechile de numere a și b.

c) Știind că $[a;b]=240$ și $a\cdot b=2880$, determinați toate perechile de numere a și b.

23. ***a)*** Arătați că $2\cdot3^n+3^{n+1}+2\cdot3^{n+2}$ este divizibil cu 23, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

b) Arătați că $5^n+3\cdot5^{n+2}-2\cdot5^{n+1}$ este divizibil cu 11, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

c) Să se arate că numărul $A=7\cdot12^n\cdot3^{n+1}+6\cdot4^{n+1}\cdot9^{n+2}+18^{n+1}\cdot2^{n+1}$ este divizibil cu 2001, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

24. Să se determine cel mai mare număr natural de trei cifre, știind că dacă se împarte pe rând la 3, 8, 11 se obțin resturile 2, 7 și respectiv 10.

25. Împărțind numărul natural n la 9, la 18 și la 27 se obțin câturi diferite de zero și de fiecare dată restul egal cu 3. Determinați cel mai mic număr natural n.

26. Numerele 348, 790 și 1180 împărțite la același număr natural dau resturile 12, 6 și respectiv 4. Aflați cel mai mic împărțitor.

27. ***a)*** Demonstrați că $2+2^2+2^3+...+2^{2006}$ este divizibil cu 3.

b) Demonstrați că $6+6^2+6^3+...+6^{21}$ este divizibil cu 43.

28. ***a)*** Determinați numerele de forma $\overline{a51b}$ divizibile cu 12.

b) Determinați numerele de forma $\overline{a5a}$ divizibile cu 9.

c) Determinați numerele de forma $\overline{a21b}$ divizibile cu 15.

29. ***a)*** Arătați că numărul natural $9^{1996}-7^{1992}$ este divizibil cu 10.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că $2005^{2005}+2006^{2006}-1$ este divizibil cu 10.

c) Arătați că $7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$ este divizibil cu 10.

d) Demonstrați că numărul $5^{n+3}\cdot 2^n-125$ este divizibil cu 5 și cu 9.

30. Arătați că:

a) dacă $(2x+3y)\vdots 5$, atunci $(12x+18y)\vdots 5$.

b) dacă $(2x+y)\vdots 3$, atunci $(5x+7y)\vdots 3$.

31. Să se arate că dacă $a\mid a\cdot b+c$ și $a\mid a\cdot c+b$, atunci $a\mid \overline{bc}+\overline{cb}$.

32. Demonstrați că numerele de forma $\overline{abcabc}$ sunt divizibile cu 13.

33. Dacă $A=2a+b+5c$ și $B=15a+46b+20c$, $a,b,c\in\mathbb{N}$, să se demonstreze că $A\vdots 7\Leftrightarrow B\vdots 7$.

34. Arătați că numerele $A=2^n\cdot 5^{n+1}+7$ și $B=2^{n+1}\cdot 5^n+3$ sunt prime între ele, $n\in\mathbb{N}$.

35. Determinați numerele prime între ele a și b știind că $3a+4b=39$.

36. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că:

$$10\cdot\left(\frac{\overline{ab}}{c}-1\right)+\frac{\overline{bc}}{a}=82.$$

37. Aflați numerele de forma $\overline{abc}$, mai mici decât 500, dacă:

a) $\overline{abc}$ dă restul 5 la împărțirea cu 9;

b) $(a+b+c)$ și $(\overline{acb}+2)$ sunt divizibile cu 7.

38. Demonstrați că numărul $A=(n+3)(n+6)$ este divizibil cu 2, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

39. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 5 și $a+d=7\cdot(b+c)$.

40. Arătați că oricum am alege 6 numere naturale, există printre ele două care au diferența divizibilă cu 5.

41. Arătați că oricare ar fi numerele naturale m și n pentru care $2m-3n=4$ numărul $A=(m-2)(n+2)$ este divizibil cu 6.

42. *a)* Determinați mulțimea resturilor obținute prin împărțirea la 10 a elementelor mulțimii $M=\{n^2\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

b) Se consideră numerele naturale x și y astfel încât numărul $A=x^2\cdot 3^{48}+y^2\cdot 2^{25}$ să fie divizibil cu 5. Arătați că x și y sunt divizibile cu 5.

43. Fie mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,7<x\le a$, unde a este număr natural$\}$

și $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,y$ este divizibil cu $5\}$.

Determinați toate numerele naturale a știind că mulțimea $A\cap B$ are 20 elemente.

44. Se consideră mulțimile: $M_1=\{1\}$, $M_2=\{1;3\}$, $M_3=\{1;3;6\}$, $M_4=\{1;3;6;10\}$, $M_5=\{1;3;6;10;15\}$, ...

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că există $k, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $55 \in M_k - M_p$.

b) Există $t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2012 \in M_t$?

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 5 din M_{2012}.

45. *a)* Să se arate că fracția $\frac{3n+7}{2n+5}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

b) Să se arate că fracția $\frac{n^2-n+2a}{3n^2+9n+2b}$ este reductibilă oricare ar fi $n, a, b \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că fracția $\frac{2\cdot 3^n+5}{3^{n+1}+6}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

d) Să se arate că fracția $\frac{2^{n+3}+2^{n+1}+2^n}{3^{n+5}+2\cdot 3^{n+3}}$ este reductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că fracția $\frac{20\cdot n+5}{15\cdot n+4}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

46. Un grup de sportivi este aliniat în coloane câte 10, 14 sau 15 sportivi și de fiecare dată rămân 6 sportivi nealiniați. Care este cel mai mic număr de sportivi pe care-l poate avea acest grup?

47. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $13n+8$ dă restul 13 la împărțirea cu 80, iar $8n+5$ dă restul 5 la împărțirea cu 50. Determinați ultimele două cifre ale lui n.

48. Cătălin și Dana participă la o competiție de biciclete pe o pistă circulară închisă. Cătălin face un tur complet în 8 minute, iar Dana în 6 minute. Ei pleacă simultan, în aceeași direcție. După câte minute Cătălin și Dana vor trece simultan prin același loc?

49. Suporterii unui club, care sunt mai mulți decât 100, dar mai puțini decât 150, se pot așeza în rânduri câte 2, câte 3, câte 4, câte 5 formând de fiecare dată un număr întreg de rânduri. Determinați numărul suporterilor din club.

50. Trei autobuze pornesc din aceeași stație, la aceeași oră, în direcții diferite. Primul autobuz efectuează cursa dus-întors în 42 minute, al doilea în 63 minute, iar al treilea în 84 minute. După cât timp vor pleca din nou, din aceeași stație, la aceeași oră?

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.4

Numere raționale. Fracții ordinare. Fracții zecimale

Fracții ordinare. O *fracție ordinară* este o pereche ordonată de numere naturale (a,b), cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$, care simbolizează câtul neefectuat dintre numerele a și b.

Numărul natural a se numește *numărătorul* fracției, iar b este *numitorul* fracției.

Fracții echivalente. Fracțiile echivalente măsoară aceeași cantitate din întreg (*echivalent* înseamnă *valoare egală*).

Din figura alăturată, se vede că *o doime* reprezintă aceeași parte dintr-un întreg ca și *două pătrimi*.

Definiție. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ *sunt echivalente* și scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ *nu sunt echivalente* și scriem $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$.

Exemple. 1. $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, deoarece $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$; 2. $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{7}$, deoarece $3 \cdot 7 \neq 5 \cdot 4$.

Amplificarea. A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a înmulți cu acel număr atât numărătorul, cât și numitorul fracției. Se scrie:

$$\frac{a}{b} \overset{n)}{=} \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemple. 1. $\frac{2}{3} \overset{5)}{=} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$; 2. $\frac{7}{13} \overset{2)}{=} \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 13} = \frac{14}{26}$; 3. $\frac{1}{4} \overset{6)}{=} \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{6}{24}$.

Simplificarea. Fie a și b două numere naturale ($b \neq 0$) și $d \neq 1$ un divizor comun al lor. A *simplifica* fracția $\frac{a}{b}$ cu numărul d înseamnă a împărți la d atât numărătorul, cât și numitorul fracției. Se scrie:

$$\frac{a}{b} \overset{(d}{=} \frac{a:d}{b:d}.$$

Exemple. 1. $\frac{10}{22} \overset{(2}{=} \frac{10:2}{22:2}$, adică $\frac{10}{22} \overset{(2}{=} \frac{5}{11}$; 2. $\frac{36}{72} \overset{(4}{=} \frac{36:4}{72:4} = \frac{9}{18}$.

Fracții ireductibile. O fracție se numește *ireductibilă* dacă ea nu se poate simplifica prin nici un număr natural diferit de 1. Fracțiile care se pot simplifica (prin numere naturale cel puțin egale cu 2) se numesc *reductibile*.

Exemple. $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{20}{33}, \frac{100}{51}, \frac{400}{1349}$ sunt fracții ireductibile.

Observații. 1. Prin amplificarea sau simplificarea unei fracții se obține o fracție echivalentă cu cea inițială.

2. O fracție este ireductibilă dacă și numai dacă numărătorul și numitorul fracției sunt numere *prime între ele*.

3. O fracție oarecare devine ireductibilă prin simplificarea cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fracția $\frac{840}{1120}$ devine ireductibilă prin simplificarea cu cel mai mare divizor comun al numerelor 840 și 1120, adică cu 280: $\frac{840}{1120}^{(240} = \frac{3}{4}$, care este fracție ireductibilă.

Observație. Folosind criteriile de divizibilitate, o fracție poate fi simplificată succesiv, până când se obține o fracție ireductibilă: $\frac{840}{1120}^{(10} = \frac{84}{112}^{(4} = \frac{21}{28}^{(7} = \frac{3}{4}$.

Aducerea fracțiilor la același numitor. Pentru a aduce două sau mai multe fracții la cel mai mic numitor comun, se parcurg următorii pași:

a. Se determină cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor date; acesta va fi numitorul comun.

b. Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun găsit și numitorul fracției respective.

Exemplu. Pentru a aduce fracțiile $\frac{5}{12}, \frac{4}{9}$ și $\frac{8}{15}$ la același numitor, procedăm astfel.

a. Cum $12 = 2^2 \cdot 3$, $9 = 3^2$ și $15 = 3 \cdot 5$, numitorul comun este $[12,9,15] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

b. Amplificăm fracția $\frac{5}{12}$ cu câtul dintre 180 și 12, adică cu 15 și obținem $^{15)}\frac{5}{12} = \frac{75}{180}$.

Amplificăm fracția $\frac{4}{9}$ cu câtul dintre 180 și 9, adică cu 20 și obținem $^{20)}\frac{4}{9} = \frac{80}{180}$.

Amplificăm fracția $\frac{8}{15}$ cu câtul dintre 180 și 15, adică cu 12 și obținem $^{12)}\frac{8}{15} = \frac{96}{180}$.

Observații.

1. În unele situații, este de preferat ca, înainte de a calcula cel mai mic multiplu comun al numitorilor, să se simplifice fiecare fracție până devine ireductibilă.
2. Dacă numitorii fracțiilor sunt numere prime între ele două câte două, atunci cel mai mic numitor comun este produsul numitorilor fracțiilor.
3. Dacă unul dintre numitorii fracțiilor este multiplu ai celorlalți numitori, atunci acesta este numitorul comun.

Număr rațional. Am văzut că aceeași cantitate dintr-un întreg poate fi reprezentată sub forma unei fracții ordinare în mai multe moduri, prin fracții echivalente. Astfel, o doime, două pătrimi, cinci zecimi etc., sunt reprezentări diferite ale aceleiași cantități, deci fracțiile echivalente $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}$ sunt forme diferite de scriere ale aceluiași număr, și anume a acelui număr care semnifică o jumătate dintr-un întreg.

> Un *număr rațional* este mulțimea tuturor fracțiilor $\frac{m}{n}$ echivalente cu o fracție dată $\frac{a}{b}$.

Oricare din elementele mulțimii se va numi *reprezentantul* numărului rațional, respectiv. Un număr rațional îl putem nota utilizând oricare dintre reprezentanții săi.

Exemplu: Numărul rațional R care semnifică trei cincimi dintr-un întreg poate fi notat prin oricare dintre fracțiile $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, ..., \frac{3k}{5k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, care sunt reprezentanți ai lui R.

Definiție. Două numere raționale sunt egale dacă orice reprezentanți ai celor două numere raționale sunt fracții echivalente.

Cu alte cuvinte, dacă pentru numerele raționale A, respectiv B, considerăm doi reprezentanți

Scanned with OKEN Scanner

oarecare $\frac{m}{n}$ şi respectiv $\frac{p}{q}$, atunci $A = B$ dacă şi numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Exemplu: Numerele raţionale $\frac{6}{10}$ şi $\frac{9}{15}$ sunt egale, deoarece fracţiile $\frac{6}{10}$ şi $\frac{9}{15}$ sunt echivalente: $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$, întrucât $6 \cdot 16 = 9 \cdot 10$.

Observaţie. Numărul raţional $\frac{6}{10}$ este mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu $\frac{6}{10}$, care este mulţimea $A = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \ldots\right\}$. La fel, numărul raţional $\frac{9}{15}$ este mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu $\frac{9}{15}$, adică mulţimea $B = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{18}{30}, \ldots\right\}$. Deoarece $A = B$, este justificat să spunem că numerele raţionale $\frac{6}{10}$ şi $\frac{9}{15}$ sunt egale.

Orice număr natural este număr raţional deoarece, dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci numărul raţional care are un reprezentant de forma $\frac{n}{1}$ poate fi identificat cu numărul natural n, pentru că semnifică aceeaşi cantitate (şi anume n întregi).

Observaţie. Numărul raţional $\frac{a}{b}$ este număr natural dacă şi numai dacă $a \vdots b$.

Mulţimea numerelor raţionale pozitive este mulţimea tuturor numerelor raţionale care au ca reprezentanţi fracţii cu numitorul şi numărătorul numere naturale nenule. Ea se notează cu simbolul $\mathbb{Q}_+^*$: $\mathbb{Q}_+^* = \left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{N}^* \text{ şi } b \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Mulţimea $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\}$ formează mulţimea numerelor raţionale, nenegative.

Deoarece orice număr natural este şi număr raţional, avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$.

Scoaterea întregilor dintr-o fracţie. Dacă un număr raţional este reprezentat de o fracţie $\frac{a}{b}$, iar c şi r sunt câtul şi restul împărţirii lui a la b, atunci putem scrie $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} = c\frac{r}{b}$, care se citeşte „$c$ întregi şi $\frac{r}{b}$". Numărul natural c se numeşte *partea întreagă*, iar numărul raţional $\frac{r}{b}$ se numeşte *partea fracţionară* a numărului raţional $\frac{a}{b}$.

Exemple. **1.** $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, deoarece $20 = 3 \cdot 6 + 2$; **2.** $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$, deoarece $48 = 5 \cdot 9 + 3$.

Introducerea întregilor într-o fracţie. Numărul raţional scris sub forma $a\frac{b}{c}$ se poate scrie sub forma unei fracţii ordinare astfel: $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$.

Forme de scriere a unui număr raţional. Prin împărţirea a două numere naturale se obţine o fracţie zecimală, cu număr finit de zecimale nenule sau periodică. Astfel, orice număr raţional poate fi exprimat atât printr-o fracţie ordinară, cât şi printr-o fracţie zecimală.

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale. O fracţie ordinară se transformă într-o fracţie zecimală prin împărţirea numărătorului la numitor. Pentru a evita

Scanned with OKEN Scanner

calculele mari, în majoritatea cazurilor este recomandat ca, înainte de împărțire, să se simplifice fracția astfel încât ea să devină ireductibilă.

Regula 1. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor nu are alți divizori primi, în afara lui 2 și/sau a lui 5, se transformă într-o *fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule*. Numărul zecimalelor este egal cu maximul dintre exponenții lui 2 și 5 din descompunerea numitorului.

Exemple. 1. $\frac{3}{16}=0,1875$, iar $16=2^4$; 2. $\frac{3}{40}=0,075$, iar $40=2^3\cdot 5$.

Observație. Deoarece descompunerea în factori primi a numitorului este de forma $2^m\cdot 5^n$, amplificând convenabil, putem obține fracții cu numitorul egal cu o putere a lui 10.

Exemple. 1. $^{2)}\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0,6$; 2. $^{5)}\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=0,35$; 3. $^{25)}\frac{11}{40}=\frac{275}{1000}=0,275$.

Regula 2. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor nu se divide nici cu 2, nici cu 5, se transformă în *fracție zecimală periodică simplă*.

Exemple. 1. $\frac{1}{3}=0,(3)$; 2. $\frac{40}{7}=5,(714285)$; 3. $\frac{47}{27}=1,(270)$.

Regula 3. Prin împărțirea numărătorului la numitor, o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor este divizibil cu cel puțin unul dintre numerele 2 și 5 și are cel puțin un alt divizor prim decât 2 sau 5, se transformă într-o *fracție zecimală periodică mixtă*. Cifrele de după virgulă, care nu se repetă, constituie partea zecimală neperiodică, iar grupul de cifre care se repetă formează partea periodică.

Exemple. 1. $\frac{35}{6}=5,8333...=5,8(3)$; 2. $\frac{53}{22}=2,4090909...=2,4(09)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

O fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător partea zecimală, iar la numitor numărul format din cifra 1 urmată de atâtea cifre de 0 câte are partea zecimală:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n}=a\frac{\overline{b_1b_2...b_n}}{10^n}$$

Exemple. 1. $2,5=\frac{25}{10}$; 2. $34,87=\frac{3487}{100}$; 3. $5,216=\frac{5216}{1000}$.

O fracție zecimală periodică simplă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada:

$$\overline{a,(b_1b_2...b_n)}=a\frac{\overline{b_1b_2...b_n}}{\underbrace{99...9}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. 1. $4,(7)=4\frac{7}{9}$; 2. $0,(29)=\frac{29}{99}$; 3. $1,(0258)=1\frac{258}{9999}$;

O fracție zecimală periodică mixtă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală neperiodică, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are partea periodică, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea zecimală neperiodică.

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)} = a\frac{\overline{b_1b_2...b_nc_1c_2...c_m} - \overline{b_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{m\text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. 1. $8,2(7) = 8\frac{27-2}{90} = 8\frac{25}{90} = 8\frac{5}{18} = \frac{8\cdot 18+5}{18} = \frac{149}{18}$.

2. $0,23(731) = \frac{23731-23}{99900} = \frac{23708}{99900} = \frac{11854}{49950} = \frac{5927}{24975}$.

Partea întreagă a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală este egală cu numărul de întregi, deci cu numărul natural scris „înainte de virgulă".

Partea fracționară (sau zecimală) a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală se obține din numărul dat înlocuind numărul de întregi cu 0.

Ținând cont de operațiile cu fracții zecimale învățate în clasa a V-a, partea fracționară a unui număr este egală cu diferența dintre numărul dat și partea sa întreagă.

Exemple: 1. Partea întreagă a numărului 3,14 este 3, iar partea sa fracționară este 0,14.
2. Partea întreagă a numărului 2,(41) este 2, iar partea sa fracționară este 0,(41).
3. Partea întreagă a numărului 5,2(71) este 5, iar partea fracționară este 0,2(71).

Media aritmetică ponderată a unor numere raționale

Definiție. Numim ***media aritmetică*** a două sau mai multe numere raționale pozitive numărul obținut prin împărțirea sumei acestor numere la numărul lor.

$$m_a(x;y) = \frac{x+y}{2}; \qquad m_a(x_1;x_2;x_3;...;x_n) = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}.$$

Exemplu: $m_a(9,4\,;\,20,6\,;\,4,2\,;\,11,8) = \frac{9,4+20,6+6,2+11,8}{4} = \frac{48}{4} = 12.$

Definiție. Media aritmetică ponderată a numerelor raționale pozitive $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, care au respectiv, ponderile $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ este numărul

$$m_{a.p.} = \frac{x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + x_3\cdot p_3 + ... + x_n\cdot p_n}{p_1+p_2+p_3+...+p_n}.$$

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numere raționale 12,5; 7,25 și 0,75 , care au ponderile 4; 6 și respectiv 20 este numărul $m_{a.p.} = \frac{12,5\cdot 4+7,25\cdot 6+0,75\cdot 20}{4+6+20} = \frac{108,5}{20} = 5,425.$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $\frac{5}{12}+\frac{7}{10}$ este egal cu ... .
2. Rezultatul calculului $1,3+2,(5)$ este egal cu ... .
3. Rezultatul calculului $2:\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{5}:\frac{11}{10}$ este egal cu ... .
4. Două numere raționale aflate între –3,4 și –3,5 sunt ... .

Scanned with OKEN Scanner

5. Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$ este egal cu ... .

6. Numărul natural n pentru care $\frac{5}{n-3}$ este o fracție echiunitară este ... .

7. Suma tuturor valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care fracția $\frac{n+1}{6}$ este subunitară, este egală cu ... .

8. Dacă $\frac{n+2}{3n-4}$ este o fracție supraunitară și $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \in \{...\}$.

9. Fracția ireductibilă echivalentă cu $\frac{175}{245}$ este egală cu ... .

10. Valoarea naturală a numărului n pentru care fracția $\frac{7}{8}$ este echivalentă cu fracția $\frac{n}{32}$ este egală cu ... .

11. Dintre numerele $\frac{7}{3}$ și $\frac{9}{5}$, mai mare este numărul ... .

12. Dacă mulțimea $A = \left\{\frac{4}{3}; 2,5; \frac{12}{3}; 5; 7; \frac{11}{2}\right\}$, atunci $A \cap \mathbb{N} = ...$ și $A \cap \mathbb{Q} = ...$

13. Ordinea descrescătoare a numerelor $a = 1,234$; $b = 1,(234)$; $c = 1,2(34)$ și $d = 1,23(4)$ este ... .

14. Scrierea sub formă de fracție zecimală a sumei numerelor $\frac{38}{10}; \frac{7}{3}; \frac{13}{2}$ și $\frac{29}{5}$ este ... .

15. Scrierea sub formă de fracție ordinară a sumei numerelor 1,(5); 3,3; 2,5(4) și 1,23 este ... .

16. Soluția ecuației $x + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ este egală cu ... .

17. Soluția ecuației $0,8x - 5 = 14$ este egală cu ... .

18. Valoarea absolută a numărului $-35,438$ este egală cu ... .

19. Un număr este egal cu $\frac{5}{8}$ din alt număr, iar suma lor este 130. Produsul celor două numere este egal cu ... .

20. Înmulțind un număr cu $\frac{2}{3}$, apoi rezultatul înmulțirii cu $\frac{14}{13}$, obținem $\frac{11}{15}$. Numărul inițial este egal cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{7} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\right\}$ și $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{2} > \frac{5}{n} > \frac{2}{3}\right\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor A și B.

b) Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Scanned with OKEN Scanner

22. Fie mulțimea $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2\right\}$.

a) Calculați $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

b) Scrieți numărul 1 ca sumă a 6 elemente distincte ale mulțimii A.

23. Se consideră numerele raționale pozitive

$$A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$$

$$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2004}{2005}.$$

a) Calculați $A-B$ și A^B.

b) Calculați $(B-2000)^{A+1}$.

24. *a)* Să se arate că $\frac{1}{k\cdot(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 100}+\frac{1}{99\cdot 101}$.

25. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor raționale:

a) $7-4(x+1)=10$.

b) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{5}{6}$.

26. Se consideră mulțimile: $A=\left\{-3;-5,(1);2,3;-\frac{8}{5};4,3(2)\right\}$, $B=\{b\mid b=-x \text{ și } x\in A\}$ și $C=\{c\mid c=|x| \text{ și } x\in A\}$

a) Determinați elementele mulțimilor B și C.

b) Determinați elementele mulțimilor $B\cap C$ și $A\setminus C$.

27. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3x+8}{x+6}\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Verificați dacă $-5\in A\cap B$.

b) Determinați $A\cap B$.

28. Demonstrați că următoarele numere sunt întregi:

a) $A=\frac{2^{80}-5\cdot 2^{81}+7\cdot 2^{79}}{11}$; *b)* $B=\frac{3^n+4\cdot 3^{n+1}-5\cdot 3^{n+2}}{8}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

29. Se consideră numerele: $a=\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3$ și $b=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

a) Determinați numerele a și b.

b) Rezolvați ecuația $a\cdot x+b=41$.

30. Un elev are o sumă de bani. Determinați suma de bani știind că după ce a cheltuit $\frac{1}{4}$ din ea, apoi $\frac{1}{6}$ din rest, apoi $\frac{1}{3}$ din noul rest și încă 120 lei, i-au mai rămas 600 lei.

Scanned with OKEN Scanner

31. Un automobil a parcurs o distanță în trei zile astfel: în prima zi a parcurs $\frac{7}{20}$ din drum, a doua zi a parcurs $\frac{2}{5}$ din distanța rămasă, iar a treia zi a parcurs restul de 624 km.

a) Câți km a parcurs automobilul a doua zi?
b) Câți km are întreaga distanță?

32. O persoană cheltuiește o sumă de bani în trei zile astfel: în prima zi cheltuieşte două treimi din sumă şi încă 15 lei, a doua zi cheltuieşte 40% din rest, iar a treia zi cheltuieşte restul de 27 de lei.

a) Aflați ce sumă a cheltuit persoana a doua zi.
b) Aflați ce sumă a avut inițial persoana.

33. Aflați media aritmetică a zece numere raționale, știind că media aritmetică a primelor două numere este 5, media aritmetică a următoarelor trei numere este 25, iar media aritmetică a ultimelor cinci numere este 125.

34. După ce a parcurs $\frac{5}{8}$ dintr-un drum, un automobilist observă că mai are de parcurs 93 km. Aflați lungimea întregului drum.

35. Să se afle trei numere, știind că primul este $\frac{3}{4}$ din al doilea şi cu 40 mai mic decât al treilea , iar media aritmetică a celor trei numere este 80.

36. O suprafață agricolă a fost arată în patru zile, astfel: în prima zi $\frac{3}{7}$ din toată suprafața, în a doua zi $\frac{5}{8}$ din rest, în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest, iar în a patra zi restul. În a doua zi a arat cu 75000 m^2 mai mult decât în a patra zi.

a) Câte hectare are întreaga suprafață ?
b) Câte hectare a arat în fiecare zi ?

37. Media aritmetică a două numere raționale pozitive este 16,75 iar raportul lor este 1,2(3). Aflați numerele.

38. În trei zile o persoană cheltuieşte o sumă de bani. În prima zi persoana cheltuieşte o pătrime din sumă, a doua zi cheltuieşte jumătate din suma rămasă, iar a treia zi cheltuieşte restul de 375 lei.

a) Ce sumă de bani a cheltuit persoana în a doua zi?
b) Ce sumă de bani a cheltuit persoana în cele trei zile?
c) Cu cât la sută este mai mare suma de bani cheltuită a doua zi față de suma de bani cheltuită în prima zi?

39. Se amestecă un litru de apă rece cu temperatura de 15°C cu patru litri de apă caldă cu temperatura $x°$ C. Determinați x știind că temperatura amestecului este 31°C.

40. Un dreptunghi are perimetrul de 20,36 cm. Știind că lungimea este cu 2,5 cm mai mare decât lățimea, calculați aria dreptunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.5

Rapoarte. Proporții. Procente. Probabilități

Raport. Prin *raportul* numerelor raționale pozitive a și b, cu $b \neq 0$, se înțelege numărul rațional $a:b$, notat $\frac{a}{b}$. Scrierea $\frac{a}{b}$ este *raportul*, iar a și b sunt *termenii* raportului.

Valoarea unui raport $\frac{a}{b}$ este numărul c care se obține din relația $c = a : b$.

Exemplu. Într-o clasă sunt 12 fete și 16 băieți. Spunem că raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este egal cu $\frac{12}{16}$. Valoarea raportului este $12:16 = 0{,}75$.

1. La scrierea raportului a două mărimi, de aceeași natură, acestea trebuie exprimate în aceeași unitate de măsură. De exemplu, dacă lățimea unui dreptunghi este egală cu 120 cm, iar lungimea este egală cu 3,6 m, pentru a afla raportul dintre lățime și lungime, întâi transformăm: $L = 3{,}6\,\text{m} = 360\,\text{cm}$ și apoi avem: $\frac{l}{L} = \frac{120\,\text{cm}}{360\,\text{cm}} = \frac{1}{3}$.
2. Se pot forma rapoarte și cu cantități de tipuri diferite. De exemplu, dacă unui om îi trebuie 3 ore pentru a parcurge 12 km, atunci se formează raportul $\frac{12\,\text{km}}{3\,\text{h}} = 4$ km/h. Formarea raportului a dus la un nou concept, de *viteză*, cu unitatea de măsură km/h.

Exemple de rapoarte utilizate în practică

1. *Scara unei hărți* este raportul dintre distanța pe hartă și distanța pe teren.
2. *Concentrația unei soluții* este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.
3. *Titlul unui aliaj* este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

Exemple.

a. Pe o hartă, unui segment ce are lungimea de 1 cm îi corespunde o distanță în teren egală cu 2 km. Deoarece 2 km = 200 000 cm, scara hărții este 1 : 200 000.

b. În 190 g de apă se dizolvă 10 g sare. Concentrația soluției este egală cu:

$$\frac{10}{190+10} = \frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

c. Un aliaj conține 240 g aur și 960 g cupru. Titlul aliajului este egal cu:

$$\frac{240}{240+960} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} = \frac{200}{1000} = 0{,}2.$$

Raportul procentual este un raport de forma $\frac{p}{100}$, care se notează $p\%$.

Dacă $p\%$ din x este egal cu y, scriem $\frac{p}{100} \cdot x = y$. În această relație $p\%$ reprezintă *raportul procentual*, ceea ce scrie după cuvântul *din*, adică x, reprezintă *întregul*, iar y reprezintă partea corespunzătoare din întreg. Avem trei tipuri de aplicații:

a. Aflarea raportului procentual (se cere $p\%$): $\frac{p}{100} \cdot x = y$.

b. Determinarea a $p\%$ dintr-un număr dat x (se cere y): $p\%$ din $x = \frac{p}{100} \cdot x$.

Scanned with OKEN Scanner

c. Aflarea unui număr când se ştie $p\%$ din el (se cere x):

$$p\% \text{ din } x = y \Leftrightarrow \frac{p}{100}\cdot x = y \Rightarrow y = x : \frac{p}{100} = x \cdot \frac{100}{y}$$

Exemple.

a. O gospodină a cheltuit 90 de lei din cei 150 de lei pe care îi avea. Cât la sută din sumă a cheltuit?

Rezolvare. Avem $p\% = \frac{90}{150}\cdot 100 = \frac{3}{5}\cdot 100 = 60 \Rightarrow p\% = 60\%$.

b. O gospodină avea la ea 150 de lei şi a cheltuit la magazin 60% din sumă. Ce sumă a cheltuit?

Rezolvare. Ştim raportul procentual şi întregul: $60\% \text{ din } 150 = \frac{60}{100}\cdot 150 = 6\cdot 15 = 90$ lei.

c. O gospodină a cheltuit 60% din suma pe care o avea, adică 90 lei. Ce sumă avea gospodina la ea ?

Rezolvare. Fie s suma pe care o avea gospodina. Atunci:

$$60\% \text{ din } s = 90 \Leftrightarrow \frac{60}{100}\cdot s = 90 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cdot s = 90 \Leftrightarrow s = 90 : \frac{3}{5} \Leftrightarrow s = 90 \cdot \frac{5}{3} = 150 \text{ lei}$$

Creşteri şi scăderi cu $p\%$. Dacă un număr x creşte, respectiv scade cu $p\%$, atunci:

când creşte devine: $x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} + \frac{p}{100}\right)x = \frac{100+p}{100}x = (100+p)\%\, x$,

când scade devine: $x - \frac{p}{100}x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x = \left(\frac{100}{100} - \frac{p}{100}\right)x = \frac{100-p}{100}x = (100-p)\%\, x$.

Proporţii. Egalitatea a două rapoarte se numeşte *proporţie*.

Dacă rapoartele $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ au aceeaşi valoare, ele formează proporţia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, iar numerele a, b, c, d se numesc *termenii proporţiei*.

Termenii a şi d se numesc *extremi*, iar termenii b şi c se numesc *mezi*.

Proprietatea fundamentală a proporţiilor. Într-o proporţie produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \text{ unde } b \neq 0 \text{ şi } d \neq 0.$$

Reciproc, dacă numerele a, b, c, d verifică relaţia $ad = bc$, atunci ele pot fi termenii unei proporţii.

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie. Dacă într-o proporţie un singur termen este necunoscut, din proprietatea fundamentală a proporţiei, acesta se poate determina astfel:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}} \quad \text{sau} \quad \text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}.$$

Proporţii derivate

1. Proporţii derivate cu aceiaşi termeni:

a. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (schimbarea extremilor între ei)

b. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (schimbarea mezilor între ei)

c. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (inversarea fiecărui raport)

Scanned with OKEN Scanner

2. Proporţii derivate cu alţi termeni:

a1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$;

a2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$, în cazul $b\neq d$.

b1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$;

b2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, în cazul $a\neq b$.

c1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

c2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

d1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{nc}{nd}$;

d2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{mb}=\frac{c}{md}$, unde $m\neq 0$ şi $n\neq 0$.

e. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ka}{ma+nb}=\frac{kc}{mc+nd}$, unde $k, m, n\in\mathbb{Q}_+$ astfel încât $ma+nb\neq 0$.

Exemple:

a1. $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2+6}{3+9}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$;

a2. $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{6-2}{9-3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$;

b1. $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}\Rightarrow\frac{2}{2+3}=\frac{6}{6+9}\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$;

b2. $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}\Rightarrow\frac{2}{3-2}=\frac{6}{9-6}\Leftrightarrow\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$;

c1. $\frac{5}{4}=\frac{15}{12}\Rightarrow\frac{5+4}{4}=\frac{15+12}{12}\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{27}{12}$;

c2. $\frac{5}{4}=\frac{15}{12}\Rightarrow\frac{5-4}{4}=\frac{15-12}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$;

d1. $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}\Rightarrow\frac{2}{7}=\frac{5\cdot 6}{5\cdot 12}\Leftrightarrow\frac{2}{7}=\frac{30}{105}$;

d2. $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}\Rightarrow\frac{2}{4\cdot 7}=\frac{6}{4\cdot 21}\Leftrightarrow\frac{2}{28}=\frac{6}{84}$;

e. $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}\Rightarrow\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3+7\cdot 5}=\frac{2\cdot 10}{4\cdot 6+7\cdot 10}\Leftrightarrow\frac{10}{47}=\frac{20}{94}$.

Şir de rapoarte egale. Mai multe rapoarte care au aceeaşi valoare formează un *şir de rapoarte egale*: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Proprietatea 1. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$, unde $b_1+b_2+\ldots+b_n\neq 0$.

Exemplu: $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{30}{70}=\frac{3+6+30}{7+14+70}=\frac{39}{91}$.

Proprietatea 2. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1k+a_2m+\ldots+a_nr}{b_1k+b_2m+\ldots+b_nr}$, unde $b_1k+b_2m+\ldots+b_nr\neq 0$.

Exemplu: $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}=\frac{15}{6}=\frac{5\cdot 3+10\cdot 7+15\cdot 6}{2\cdot 3+4\cdot 7+6\cdot 6}=\frac{175}{70}$.

Mărimi direct proporţionale. Două mărimi variabile sunt *direct proporţionale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una creşte de un număr de ori, atunci şi cealaltă creşte de acelaşi număr de ori. De exemplu, dacă 1 kg de fructe costă 1,5 lei, atunci 2 kg costă de două ori mai mult, 3 kg costă de trei ori mai mult etc. Între cantitate şi cost e o relaţie de directă proporţionalitate.

În general, între două mulţimi finite de numere se stabileşte o proporţionalitate directă, dacă şi numai dacă se poate forma un şir de *rapoarte* egale, astfel încât mulţimea numărătorilor rapoartelor să fie una din mulţimi, iar mulţimea numitorilor rapoartelor să fie cealaltă mulţime. În cele ce urmează vom folosi notaţia $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ pentru a desemna o mulţime ordonată (ordinea elementelor nu poate fi modificată).

Definiţie. Mulţimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ este direct proporţională cu mulţimea

Scanned with OKEN Scanner

ordonată $(b_1, b_2, b_3, ..., b_p)$ dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_p}{b_p}$. Valoarea comună a acestor rapoarte se numeşte coeficient de proporţionalitate şi se notează, de regulă, cu k, unde $k \neq 0$.

Exemplu. Mulţimea ordonată (3, 9, 15) este direct proporţională cu mulţimea ordonată (1, 3, 5), deoarece $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{15}{5}$. Coeficientul de proporţionalitate este egal cu 3.

Mărimi invers proporţionale. Două mărimi variabile sunt *invers proporţionale*, dacă depind una de cealaltă, astfel încât dacă una creşte de un număr de ori, atunci cealaltă scade de acelaşi număr de ori. De exemplu, 10 m de stofă se pot cumpăra cu o anumită sumă de bani Dacă preţul stofei ar fi de două ori mai mic, atunci cu aceeaşi sumă de bani s-ar cumpăra 20 m de stofă. Dacă preţul stofei ar fi de trei ori mai mic, atunci cu aceeaşi sumă de bani s-ar cumpăra de trei ori mai multă stofă. Preţul stofei şi lungimea cuponului cumpărat sunt mărimi invers proporţionale.

În general, între două mulţimi finite de numere se stabileşte o proporţionalitate inversă, dacă şi numai dacă se poate forma un şir de *produse* egale, astfel încât primul factor al fiecărui produs să fie element al unei mulţimi, iar cel de-al doilea factor să fie element al celeilalte mulţimi.

Definiţie. Mulţimea ordonată $(a_1, a_2, a_3, ..., a_p)$ este direct proporţională cu mulţimea ordonată $(b_1, b_2, b_3, ..., b_p)$ dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = a_p \cdot b_p$.

Exemplu. Mulţimea {3; 4; 6} este invers proporţională cu {4; 3; 2}, deoarece $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$.

Regula de trei simplă este procedeul folosit pentru a determina numărul necunoscut dintr-o mulţime de două elemente, dacă între acea mulţime şi o altă mulţime ale cărei elemente sunt cunoscute există o relaţie de directă proporţionalitate sau de inversă proporţionalitate.

Pentru a rezolva concis o problemă, aplicând *regula de trei simplă,* convenim să comparăm mintal mărimile de acelaşi fel şi ilustrăm concluzia la care am ajuns cu o săgeată orientată cu vârful spre elementul mai mare:

- dacă săgeţile sunt orientate în acelaşi sens, mărimile sunt direct proporţionale;
- dacă săgeţile au sensuri opuse, mărimile sunt invers proporţionale.

Problema 1. 3 kg de mere costă 15 lei. Cât costă 7 kg de mere de aceeaşi calitate?

Rezolvare:

↓ 3 kg de mere ..... 15 lei
↓ 7 kg de mere ..... x lei

S-a *mărit* cantitatea de mere, *se va mări* şi preţul şi am orientat săgeţile, conform convenţiei menţionate anterior. Deducem că mărimile (cantitatea de mere şi preţul) sunt direct proporţionale. Folosind metoda proporţiei, scriem cele două rapoarte în ordinea sugerată de datele problemei.

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 7}{3} = 35 \text{ lei.}$$

Problema 2: Patru muncitori execută o lucrare în 6 zile. În câte zile ar termina acea lucrare 3 muncitori, lucrând cu aceeaşi îndemânare ?

Rezolvare:

↑ 4 muncitori ..... 6 zile
↑ 3 muncitori ..... x zile

S-a *micşorat* numărul muncitorilor, *se va mări* numărul zilelor. Deducem că cele două mărimi (numărul muncitorilor şi timpul necesar) sunt invers proporţionale. Vom folosi metoda proporţiei, dar scriem inversul celui de-al doilea raport sugerat de datele problemei, iar primul rămâne neschimbat.

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8. \text{ Sunt necesare 8 zile.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilități

Să considerăm următoarele *experimente* ce pot avea cel puțin două rezultate posibile:

1. Extragerea unei bile dintr-o urnă. Dacă bilele sunt identice ca formă sau greutate dar diferă prin culoare și extragem bila fără a privi în urnă atunci este posibilă extragerea oricărei bile. Dacă în urnă sunt bile de trei culori diferite, atunci sunt trei rezultate posibile ale acestui experiment.
2. Aruncarea unui zar. Oricare dintre cele șase fețe ale sale poate apărea, deci experimentul are șase rezultate posibile.
3. Aruncarea unei monezi. Sunt două rezultate posibile.

Vom numi *eveniment* rezultatul pe care dorim să îl obținem.

Exemple. 1. Extragerea unei bile de o anumită culoare.
2. Apariția feței cu șase puncte.
3. Apariția feței pe care este înscrisă valoarea monedei.

Definiție. Probabilitatea ca un anumit eveniment să se producă este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul cazurilor posibile experimentului.

Notând cu n_f numărul cazurilor favorabile realizării unui anumit eveniment/experiment eveniment A și cu n_p numărul tuturor cazurilor posibile, probabilitatea p de realizare a evenimentului A este: $p(A)=\frac{n_f}{n_p}$, unde $n_f, n_p \in \mathbb{N}$, $n_p \neq 0$, iar $n_f \leq n_p$.

Exemplu. Dintr-o urnă ce conține 8 bile albe și 9 bile negre extragem o bilă. Extragerea unei bile albe este un eveniment pe care îl vom nota cu A. Extragerea unei bile negre este un al doilea eveniment pe care îl notăm cu N. Întrucât oricare dintre bile poate fi extrasă, sunt 17 cazuri posibile. Pentru realizarea evenimentului A sunt 8 cazuri favorabile, iar pentru evenimentul N sunt 9, deci $P(A)=\frac{8}{17}$ și $P(N)=\frac{9}{17}$.

Evenimentul *sigur* este cel pentru care $p = 1$ (toate cazurile posibile sunt favorabile) și eveniment *imposibil* când $p = 0$ (nici un caz posibil nu este favorabil).

Exemplu. Într-o urnă sunt 3 bile roșii și 5 bile albe. Calculați:
a. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să nu fie neagră;
b. probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie verde.

Soluție.
a. În urnă fiind numai bile albe și roșii sigur nu se poate extrage o bilă neagră:

$$n_f = 3 + 5 = 8,\ n_p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{8} = 1$$

b. Este imposibil să extragem o bilă verde, dacă în urnă sunt numai bile albe și roșii:

$$n_f = 0,\ n_p = 8 \Rightarrow p = \frac{0}{8} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Se știe că $\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$ și $\frac{y}{z}=\frac{7}{12}$. Valoarea raportului $\frac{x}{z}$ este … .

2. Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este 5. Dacă $b=12,4$, atunci $a=$ … .

3. Un dreptunghi are lungimea de 21 m și lățimea de 7 m. Raportul dintre lățime și perimetru este … .

4. Raportul dintre ariile totale a două cuburi este 0,25. Raportul volumelor lor este … .

5. Suma termenilor unui raport supraunitar este 30, iar diferența lor este 6. Valoarea raportului este egală cu … .

6. Numerele naturale a și b verifică relația $\frac{a}{b}=\frac{13}{20}$. Atunci a este egal cu … % din b.

7. O bancă acordă o dobândă anuală de 6%. După trei luni, Victor încasează o dobândă de 30 lei. Suma depusă de Victor la bancă este de … lei.

8. În 200 g de apă se pun 40 g de zahăr. Concentrația soluției este de … .

9. O soluție de sare are concentrația de 13%. După evaporarea apei din 100 g de soluție, rămâne o cantitate de sare cu masa de … grame.

10. Concentrația unei soluții este 8%. Atunci 10 g de sare se găsesc în … grame de soluție.

11. O canapea costă 800 de lei. Prețul ei se micșorează cu 6%. Noul preț este … lei.

12. Salariul unui funcționar este de 1100 lei. El se mărește cu 7%. Noul salariu este ... lei.

13. Probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare pe x cu o cifră, numărul $\overline{432x}$ să fie divizibil cu 4 este egală cu … .

14. Probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare pe x cu o cifră, numărul $\overline{6x7x8}$ să fie divizibil cu 9 este egală cu … .

15. Probabilitatea ca, la aruncarea unui zar, să se obțină un multiplu de 2, este egală cu … .

16. Probabilitatea ca, la aruncarea a două zaruri, să se obțină două numere cu suma multiplu de 5 este egală cu … .

17. Într-o urnă sunt 10 bile roșii, 12 albe și 8 negre. Probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie albă este … .

18. Într-o urnă sunt 10 bile roșii, 12 albe și 8 negre. Probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să nu fie neagră este … .

19. O proporție cu termenii 3, 6, 8, 4 este … .

20. Numărul rațional nenul n din proporția $\frac{3}{n}=\frac{14}{42}$ este … .

21. Numărul natural a dacă $\frac{a+2}{39}=\frac{7}{13}$ este egal cu … .

22. Raportul dintre numerele raționale a și b este $\frac{a}{b}=\frac{2}{7}$. Atunci $\frac{a}{a+b}=$ … .

Scanned with OKEN Scanner

23. Numerele raționale a și b verifică relația $\frac{a}{3a+2b}=\frac{5}{22}$. Raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu ... .

24. Extremii unei proporții sunt 2,1 și 6,5, iar unul dintre mezi este 3,9. Celălalt med este egal cu ... .

25. Un extrem al unei proporții este 2,64, iar mezii proporției sunt 3,96 și 7,2. Celălalt extrem este egal cu ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

26. Numerele naturale x, y, z verifică egalitățile $\frac{x}{z}=\frac{y}{15}$ și $yz=135$. Aflați numărul x.

27. Împărțiți numărul 11200 în părți direct proporționale cu 19, 24 și 7.

28. Aflați numerele naturale m și n știind că 32, m, 24 sunt direct proporționale cu n, 5, 6.

29. Numerele raționale a, b și c sunt direct proporționale cu 0,(2), 0,(3) și 0,(4). Știind că $c-a=10$, determinați valoarea sumei $a+2b+c$

30. Determinați cifra x astfel încât numerele $\overline{4x}$ și $\overline{x4}$ să fie direct proporționale cu 4 și 7.

31. Aflați două numere cu suma 60, știind că sunt direct proporționale cu 11 și 13.

32. Din 56 kg de struguri se storc 42 litri de must. Aflați câte kg de struguri sunt necesare pentru a obține 60 litri de must.

33. O echipă de 15 muncitori termină o lucrare în 8 zile. Aflați în cât timp se execută lucrarea dacă echipa ar conține 12 muncitori.

34. Numerele raționale a și b au raportul 4 și diferența 18.
a) Determinați media aritmetică a numerelor a și b.
b) Calculați media geometrică a lui a și b.

35. Se dă proporția $\frac{2a-1}{5a-4}=\frac{5}{12}$.
a) Aflați numărul rațional a din proporția de mai sus.
b) Determinați numărul rațional b pentru care cele două fracții din proporție și $\frac{2b+8}{7b-5}$ formează un șir de rapoarte egale.

36. Într-o clasă cu 30 de elevi, 30% dintre ei au media de 10 la fizică, 50% au media 10 la matematică și 40% au media 10 la chimie.
a) Câți elevi au media 10 la fizică, câți la matematică și câți la chimie?
b) Ce procent reprezintă numărul elevilor de 10 la fizică din cel al elevilor de 10 la matematică?
c) Arătați că cel puțin 6 elevi au media 10 la una dintre disciplinele matematică, fizică sau chimie.

37. Trei persoane au depus la bancă sume direct proporționale cu 4, 6 și 14. Dobânda oferită de bancă este 8% pe an. După un an aveau la bancă în total 9072 lei.
a) Ce sumă de bani a depus inițial fiecare persoană?
b) Ce sumă de bani avea în bancă după un an fiecare persoană?
c) Ce procent reprezintă suma celei de-a treia persoane din suma sumelor primelor două persoane după un an?

38. După o reducere de preț egală cu 8%, un aspirator se poate cumpăra cu 322 lei.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați prețul inițial al aspiratorului.
b) Care este cel mai mic număr natural p pentru care, după o reducere cu $p\%$ a prețului aspiratorului, astfel încât acesta să coste mai puțin de 300 lei?

39. Adi citește un roman scris în trei volume, care au în total 3000 de pagini. Fiind pasionat de matematică, Adi observă că dacă numărul paginilor primului volum ar fi mai mic cu 75%, numărul paginilor celui de-al doilea ar fi mai mic cu 80%, iar cel de-al treilea ar conține cu $\frac{2}{3}$ mai puține pagini, ar fi un număr egal de pagini în fiecare volum.
a) Câte pagini are fiecare volum?
b) Dacă Adi citește un număr egal de pagini în fiecare zi, ce procent din timpul necesar citirii celui de-al doilea volum îl reprezintă timpul necesar citirii celui de-al treilea volum?

40. La livrarea din fabrică către dealer, un autoturism are prețul de 7500 euro. Dealer-ul auto aplică un comision de 40%, iar la suma obținută se adaugă taxa pe valoare adăugată (TVA), în valoare de 24%, obținându-se astfel prețul de vânzare al autoturismului. Dacă un cumpărător achită un avans de 20% din prețul de vânzare, restul banilor îi poate achita în 24 rate lunare egale.
a) Care este valoarea TVA?
b) Care este prețul de vânzare al autoturismului?
c) Cât reprezintă rata lunară?

41. O soluție de sare cu apă are masa 240 g și concentrația de 15%.
a) Care este masa sării din soluție?
b) Câtă apă trebuie adăugată pentru a obține o soluție cu concentrația de 10% ?

42. Într-o bibliotecă sunt 16 000 de cărți din care 90% sunt în limba română,iar 80% din numărul cărților în limbi străine sunt în limba engleză. Cât la sută din cele 16 000 de cărți sunt în limba engleză?

43. Din numărul total al volumelor aflate în biblioteca unei școli, 60% sunt cărți de literatură, 36% sunt culegeri școlare, iar restul de 168 de volume sunt dicționare.
a) Ce procent reprezintă numărul culegerilor din numărul cărților de literatură ?
b) Câte volume sunt în total în bibliotecă?
c) Cu ce procent trebuie să se mărească fondul de carte existent pentru ca biblioteca să conțină 5000 de volume?

44. Într-o cutie sunt 120 de bile albe, negre și roșii. Numărul bilelor roșii este de trei ori mai mic decât al bilelor albe și negre la un loc, iar numărul bilelor albe este cu 18 mai mare decât al celor negre.
a) Câte bile de fiecare culoare sunt în cutie?
b) Care este probabilitatea ca extrăgând o bilă din cutie, aceasta să fie roșie?

45. Se consideră o hartă care are scara 1 :800.000.
a) Calculați distanța de pe hartă, exprimată în cm, dintre orașele București și Iași, știind că acestea se află la 400 km unul de altul.
b) Ce distanță, exprimată în kilometri, este între Constanța și București, dacă pe hartă drumul dintre ele are lungimea de 27,5 cm?

46. Într-un depozit erau 1 200 tone de marfă. În prima săptămână s-au vândut 10% din cantitatea de marfă, iar în a doua săptămână 15% din rest.
a) Câte tone s-au vândut în fiecare săptămână?
b) Cât la sută din marfă a rămas în depozit după a doua săptămână?

Scanned with OKEN Scanner

47. Preţul unui obiect se măreşte de două ori succesiv cu câte 20%.
a) Aflaţi preţul iniţial al obiectului ştiind că preţul acestuia după cele doua măriri este de 432 lei.
b) Cu ce procent ar fi trebuit făcută o singură mărire de preţ astfel ca obiectul să ajungă la preţul de după cele două măriri?

48. O agendă costă 15 lei dar în cazul în care sunt cumpărate cel puţin 10 bucăţi se oferă o reducere de 10% din valoare.
a) Ce sumă de bani trebuie să achite cineva care doreşte să achiziţioneze 9 agende?
b) Ce sumă de bani trebuie să achite cineva care doreşte să achiziţioneze 10 agende?

49. Un gospodar are în curte raţe, curci şi găini, în total 100 de păsări. Ele pot fi grupate astfel încât la o curcă să corespundă 2 găini, iar la 3 curci o raţă.
a) Determinaţi raportul dintre numărul de găini şi numărul de raţe.
b) Aflaţi câte păsări de fiecare fel sunt în curte.
c) Dacă cele 100 de păsări mănâncă, în medie, 100 kg de boabe în 100 zile, câte kg mănâncă 10 păsări în 10 zile ?

50. Mihai avea 20 de lei din care dorea să îşi cumpere caiete al căror preţ este de 1 leu. Între timp acestea s-au scumpit cu 10%. Câte caiete poate să cumpere acum?

51. Pentru a obţine făină din grâu, se pierde 20% din cantitatea de grâu. Din cât grâu se pot obţine 650 kg de făină?

52. Se ştie că 21% dintr-o cantitate de lapte este smântână, iar 25% dintr-o cantitate de smântână este unt. Aflaţi din câte kilograme de lapte se pot obţine 52,5 kg de unt.

53. Într-o fabrică se execută 15 000 de piese de acelaşi fel. În prima etapă se execută 20% din numărul de piese, în a doua etapă 50% din rest, iar în a treia etapă restul.
a) Câte piese au fost realizate în fiecare etapă?
b) Cât la sută din producţia totală a fost realizată în a doua etapă?
c) Cu cât la sută a crescut producţia în a doua etapă?

54. Îmi creez un depozit la bancă. În primul an am primit 12% dobândă, iar în al doilea an dobânda a fost de 15%. Am acum 579,6 lei. Câţi lei am depus iniţial?

55. Preţul unui obiect a crescut cu 10% şi după un timp a scăzut cu 10%. Ştiind că după reducere costă 44,55 lei, determinaţi preţul iniţial.

56. După două creşteri consecutive de preţ cu 20% din preţul iniţial şi respectiv 15% din noul preţ, un obiect a ajuns să coste cu 760 lei mai mult decât era preţul iniţial. Determinaţi preţul iniţial şi cel de după prima creştere.

57. Determinaţi numerele a, b, c ştiind că a şi b sunt direct proporţionale cu 5 şi 8, b şi c sunt invers proporţionale cu 3 şi 2, iar $3a+2b-c=57$.

58. O echipă de 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimişi să lucreze în altă parte. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas?

59. Un număr de 6 muncitori au început o lucrare pe care şi-au propus să o termine în 20 de zile, lucrând câte 8 ore pe zi. După 4 zile 2 muncitori pleacă. În cât timp va fi terminată lucrarea, dacă cei rămaşi lucrează câte 6 ore pe zi?

60. Pentru o evaluare au fost propuse 48 subiecte. Un elev are deja rezolvate 32 de variante. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o variantă, aceasta să nu fie rezolvată de elev ?

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.6

Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali

Rădăcina pătrată a numărului raţional pozitiv a este numărul raţional x cu proprietatea $x^2 = a$. Se notează $x = \sqrt{a}$ şi se citeşte *radical din a.*

Observaţie. Dacă a este un număr raţional pozitiv, atunci există două numere distincte al căror pătrat este a, şi anume $\sqrt{a}$ şi $-\sqrt{a}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Proprietăţi:

1. $\sqrt{a} \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{Q}_+$. **2.** $(\sqrt{a})^2 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}_+$. **3.** $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.

Exemple. $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$; $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$; $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Raţionalizarea numitorilor unui raport reprezintă operaţia de eliminare a radicalului de la numitorul raportului respectiv, fără a modifica valoarea raportului. De exemplu, dacă numitorul unui raport de numere reale este un număr irațional de forma $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}^*, b > 0$, prin amplificarea raportului cu $\sqrt{b}$, numitorul devine un număr raţional. Se spune că am *raţionalizat numitorul.*

1. Dacă $a, c \in \mathbb{R}^*$ şi $b > 0$, atunci $\frac{c}{a\sqrt{b}} = \frac{^{\sqrt{b})}c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{a\sqrt{b^2}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$.

2. Dacă $a, c, d \in \mathbb{R}$ şi $b > 0$, atunci:

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{^{a-\sqrt{b})}c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}, \text{ unde } a \neq -\sqrt{b};$$

$$\frac{d}{a-\sqrt{b}} = \frac{^{a+\sqrt{b})}d}{a-\sqrt{b}} = \frac{d\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}, \text{ unde } a \neq \sqrt{b}.$$

Observaţie. Expresiile de tipul $a+\sqrt{b}$ şi $a-\sqrt{b}$ sunt reciproc *conjugate.*

Raţionalizarea unui raport al cărui numitor conţine radicali se face amplificând raportul cu conjugatul numitorului.

Exemple. **1.** $\frac{3}{2-\sqrt{3}} \overset{2+\sqrt{3})}{=} \frac{3(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{6+3\sqrt{3}}{4-3} = 6+3\sqrt{3}$.

2. $\frac{5}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \overset{2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{=} \frac{5(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{8-3} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea numerelor reale

Mulțimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (sau $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) este mulțimea *numerelor iraționale.*

Mulțimea numerelor reale este $\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$. Avem $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

În scrierea ca fracție zecimală, numerele iraționale au partea zecimală infinită și neperiodică.

Exemple de numere iraționale.

1. $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{7},\ -3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}+7,\ -4\sqrt{3}+5$.

2. 0,1010010001000010... (după fiecare cifră 1 sunt numărul zerourilor scrise crește cu 1).

3. Dacă numărul natural n nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este număr irațional.

Compararea numerelor reale. Fie a și b două numere reale astfel încât a este reprezentat pe axa numerelor la stânga lui b. Spunem că a este mai mic decât b și scriem $a < b$ sau spunem că b este mai mare ca a și scriem $b > a$.

Dacă $a < b$ sau $a = b$ spunem că a este mai mic sau egal cu b și scriem $a \le b$ sau că b este mai mare sau egal cu a și scriem $b \ge a$.

Modulul unui număr real x, notat $|x|$, este distanța de la origine la punctul ce îl reprezintă pe o axă a numerelor.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{pentru } x \ge 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}.$$

Proprietățile modulului unui număr real

1. $|x| \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

3. $|x| = |-x|$, oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

5. $|x+y| \le |x|+|y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

6. $|x-y| \le |x|+|y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

7. $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

8. $\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{R}$.

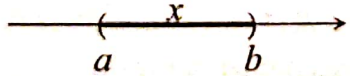
9. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, atunci $|x| < a$ dacă și numai dacă $-a < x < a$.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, atunci $|x| > a$ dacă și numai dacă $x < -a$ sau $x > a$.

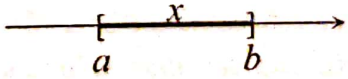
Intervale. Un *interval* este o submulțime nevidă I a mulțimii $\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $u, v \in I$, $u < v$, dacă x este un număr real cuprins între u și v, atunci $x \in I$.

1. Intervale mărginite: sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este un segment. Un interval mărginit poate fi:

a. deschis: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

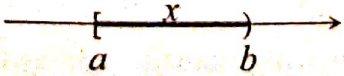


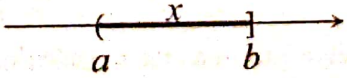
b. închis: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$



c. semiînchise / semideschise:

- închis la stânga și deschis la dreapta: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;
- deschis la stânga și închis la dreapta: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.





Observație. Un interval închis cu capetele egale se reduce la un punct: $[a,a] = \{a\}$.

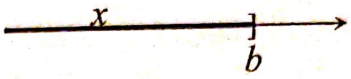
Scanned with OKEN Scanner

2. Intervale nemărginite: sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este o semidreaptă. Un interval nemărginit poate fi:

a. nemărginit la stânga şi mărginit la dreapta:

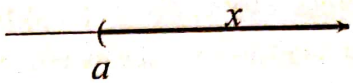
- deschis la dreapta: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

- închis la dreapta: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$



b. nemărginit la dreapta şi mărginit la stânga:

- deschis la stânga: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



- închis la stânga: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

Observaţie. Mulţimea $\mathbb{R}$ este un interval nemărginit: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Operaţii cu numere reale

Adunarea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale x şi y, i se asociază un număr real, notat $x + y$, numit *suma* numerelor x şi y.

Scăderea este operaţia prin care, oricărei perechi de numere reale x şi y, i se asociază numărul real $x + (-y)$, numit *diferenţa* numerelor x şi y, notat $d = x - y = x + (-y)$.

Proprietăţile operaţiei de adunare

1. Adunarea este *asociativă*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Numărul real 0 este *element neutru*: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3. Orice număr real a are un *opus notat* $-a$ cu proprietatea: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

4. Adunarea este *comutativă*: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Înmulţirea este operaţia prin care, oricărei perechi de numere reale x şi y i se asociază un număr real, notat $x \cdot y = xy$, numit *produsul* numerelor x şi y.

Împărţirea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale x şi y, $y \neq 0$, i se asociază un număr real, notat $x : y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, numit *câtul* numerelor x şi y.

Proprietăţile operaţiei de înmulţire

1. Înmulţirea este *asociativă*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Numărul real 1 este *element neutru*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ cu proprietatea $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

4. Înmulţirea este *comutativă*: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Înmulţirea este *distributivă* în raport cu adunarea şi scăderea numerelor reale:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ şi, pentru $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Spunem că a^n este puterea n a numărului real a. În scrierea a^n, numărul a se numeşte *baza* puterii, iar numărul n se numeşte *exponentul* puterii. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a^1 = a$,

Scanned with OKEN Scanner

iar dacă $a \neq 0$, definim $a^0 = 1$. Expresia 0^0 este *operație fără sens.*

Reguli de calcul cu puteri. Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$ avem:

1. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$; **2.** $a^m : a^n = a^{m-n}$; **3.** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; **5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Rădăcina pătrată a unui număr real $a \geq 0$ este numărul real r, $r \geq 0$, cu proprietatea $r^2 = a$. Notăm: $r = \sqrt{a}$.

Reguli de calcul cu radicali

1a. $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$. **1b.** $(\sqrt{a})^2 = a$, oricare ar fi $a \geq 0$.

2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, pentru $a \geq 0, b \geq 0$. Consecință: $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pentru $a \geq 0$ și $b > 0$. Consecință: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt{a})^n}{(\sqrt{b})^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Introducerea factorilor sub radical: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ dacă } a \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ dacă } a < 0, b \geq 0 \end{cases}$.

5. Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și $b \geq 0$.

Medii. Dacă a și b sunt numere reale, $a \leq b$, atunci orice număr $m \in [a, b]$ este o *medie* a numerelor a și b.

1. Media aritmetică a numerelor a și b este numărul real $m_a = \frac{a+b}{2}$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$ este $m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

2. Media aritmetică ponderată. Fie $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere reale pozitive. Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$, este numărul real

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Observație: Dacă $p_1 = p_2 = ... = p_n$, atunci media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$ coincide cu media lor aritmetică.

3. Media geometrică a numerelor reale pozitive a și b este numărul $m_g = \sqrt{ab}$.

4. Media armonică a numerelor reale $a, b > 0$ este numărul $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

5. Media pătratică a numerelor reale $a, b \geq 0$ este numărul $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

6. Inegalitatea mediilor. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ și $a \leq b$, atunci

$$a \leq m_h(a,b) \leq m_g(a,b) \leq m_a(a,b) \leq m_p(a,b),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b$.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Dintre numerele $a=9$ și $b=\sqrt{10}$ rațional este numărul ....
2. Dintre numerele $a=-4\sqrt{7}$ și $b=3,1(46)$ irațional este numărul ....
3. Rădăcina pătrată a numărului $\sqrt{81}$ este egală cu....
4. Cel mai mare număr natural mai mic decât $\sqrt{10}$ este....
5. Cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu $-\sqrt{5}$ este....
6. Dintre numerele $a=5\sqrt{2}$ și $b=4\sqrt{3}$ mai mare este numărul ....
7. Rezultatul calculului $4\sqrt{2}+\sqrt{50}$ este egal cu ....
8. Rezultatul calculului $4\sqrt{3}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+\sqrt{75}$ este egal cu...
9. Rezultatul calculului $\left(\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}:\sqrt{40}\right)^2-\left(\sqrt{45}-\sqrt{20}\right)^2$ este...
10. Calculând valoarea numărul real $a=\sqrt{2^4+2^7}$ se obține...
11. Rezultatul calculului $(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})+5$ este egal cu...
12. Calculând $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ se obține...
13. Calculând $\sqrt{5^2-3^2}\cdot\sqrt{5^2\cdot 3^2}$ se obține...
14. Calculând $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ se obține...
15. Calculând media aritmetică a numerelor $x=\sqrt{2}+1$ și $y=\sqrt{2}-1$ se obține...
16. Media geometrică a numerelor $a=2$ și $b=50$ este egală cu....
17. Fie expresia $E(a)=\sqrt{(a-4)^2}+|a-2|+|-2a|$. Efectuând calculele, pentru $a=2$, se obține...
18. Numărul elementelor mulțimii $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|\le 3\}$ este egal cu...
19. Mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x|<2\}$ este egală cu intervalul...
20. Numărul $\sqrt{2}$ se rotunjește la cifra zecimilor. Rezultatul acestei rotunjiri este...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie numărul $A=2^{2n}\cdot 25^n\cdot 5-4^n\cdot 5^{2n}$, unde $n\in\mathbb{N}$.
    a) Arătați că numărul natural A este pătrat perfect.
    b) Determinați valoarea numărului n pentru care $\sqrt{A}$ nu se divide cu 10.
22. *a)* Scrieți toate numerele de forma $\overline{xy}$, în baza zece, care sunt pătrate perfecte.
    b) Calculați cel mai mic număr de forma $\overline{ab}$, scris în baza zece, pentru care $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ este un număr natural.
23. Se consideră mulțimile:
    $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,\sqrt{x}<2\}$, $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,1\le\sqrt{y}\le 3\}$ și $C=\{z\in\mathbb{Z}\,|\,z^2\in B\}$.
    a) Determinați elementele mulțimilor A și B.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculați suma elementelor mulțimii C.

c) Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare, un element din mulțimea C, acesta să fie pătrat perfect.

24. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,2\le\sqrt{x}<3\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,-2\le-\sqrt{x}\le-1\}$.

a) Arătați că 4 este un element comun mulțimilor A și B.

b) Determinați elementele mulțimilor A și B.

c) Determinați $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ și $B-A$.

25. Considerăm numerele reale a, b și c. Se știe că $a+b=5\sqrt{3}$, iar $c=3\sqrt{3}$.

a) Calculați $(a+b)+c$ și $a+(b+c)$;

b) Dacă $a=-\sqrt{3}$, determinați $b-c$.

26. Se consideră numerele $a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

a) Comparați numerele $a\cdot b$ și $a+b$.

b) Arătați că numărul $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ aparține intervalului $\left(\frac{4}{5};\frac{6}{5}\right)$.

27. Se consideră numerele:

$a=\sqrt{5}\cdot(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})-2(2\sqrt{10}+3)$ și $b=2\sqrt{7}\cdot(3-\sqrt{3})+2(4+\sqrt{21})-6\sqrt{7}$.

a) Arătați că numerele a și b sunt întregi.

b) Calculați media aritmetică a numerelor a și b.

28. Se consideră numerele:

$x=\sqrt{162}-\sqrt{242}+\sqrt{288}-\sqrt{98}+\sqrt{18}$ și $y=\sqrt{320}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{125}-\sqrt{180}$.

a) Calculați x și y.

b) Încadrați numărul x între două numere naturale consecutive.

c) Arătați că $x\cdot y$ aparține intervalului $(-19,-18)$.

29. Fie numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

a) Calculați $a\cdot b$.

b) Calculați a^2+b^2.

c) Arătați că numărul $\frac{b}{a}-\sqrt{3}$ este natural.

30. Se consideră numerele:

$$x=4\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}+\frac{\sqrt{54}}{3}-\sqrt{6}\right)\cdot\frac{7}{\sqrt{6}}$$

și $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{18}}-\frac{5}{\sqrt{50}}+\frac{24}{\sqrt{72}}\right)+\frac{14}{3\sqrt{7}}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{6}{\sqrt{7}}-\frac{15}{\sqrt{63}}\right)+1$.

a) Arătați că numerele x și y sunt numere naturale.

b) Ordonați crescător numerele: x, y, x^y și y^x.

31. Calculați $3a+2b$, unde:

$a=\frac{3}{\sqrt{2}-1}+\frac{4}{2-\sqrt{2}}-\frac{5}{3-2\sqrt{2}}+\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$, $b=\frac{8}{2-\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}+1}-\frac{3}{2\sqrt{3}-3}-\frac{8}{3\sqrt{3}+5}$.

32. *a)* Arătați că numărul $a=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ se află în intervalul $(3;2\sqrt{3})$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați un număr irațional care aparține intervalului $(3;2\sqrt{3})$ și care este de forma $\sqrt{n}$, cu n număr natural.

33. Considerăm mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{5}{2x-3}\in\mathbb{Z}\right\} \quad \text{și} \quad B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,(3x+\sqrt{2})(3-x\sqrt{2})=7\right\}.$$

a) Arătați că 1 este element comun al mulțimilor A și B.
b) Calculați suma elementelor mulțimii A.
c) Scrieți elementele mulțimii B.

34. *a)* Se consideră numărul $a=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot25+3$. Arătați că $\sqrt{a}$ este irațional.
b) Arătați că numărul $b=\sqrt{5n+3}$ este irațional, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

35. Se consideră suma: $S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați S, dacă $n=24$;
b) Determinați numărul natural n, astfel încât $S=24$;
c) Determinați toate numerele naturale n, astfel încât S să fie un număr natural mai mic decât 24.

36. Cristi, Paul și Vlad au înălțimile de 1,65 m, 1,68 m și respectiv 1,71 m.
a) Care este înălțimea medie a celor trei băieți?
b) Arătați că înălțimea medie a celor trei băieți este mai mare decât $\sqrt{2}$ m.

37. Media geometrică a înălțimilor a doi copaci este $6\sqrt{3}$ m. Unul dintre copaci are înălțimea egală cu 9 m. Câți metri are celălalt copac în înălțime?

38. Andra și Raluca au fiecare sume de bani (în lei), proporționale cu numerele 4 și 5. Media geometrică a sumelor de bani a celor două fete este $24\sqrt{5}$.
a) Câți lei are fiecare ?
b) Mergând printr-un magazin, fetele vor să-și cumpere câte un tricou pe care scrie „99 lei – 55% reducere". Le ajung banii ?

39. Un teren de formă triunghiulară are laturile proporționale cu 2, 3, $\frac{9}{2}$. Știind că terenul este împrejmuit cu un gard de lungime 16 m, arătați că lungimea unei laturi este media geometrică a lungimilor celorlalte două.

40. Un container plin cu marfă cântărește 155,5 kg. Umplut pe jumătate, containerul cântărește 86 kg. Câte kilograme cântărește containerul atunci când este gol?

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.7

Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori

Formule de calcul prescurtat

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

2a. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; **2b.** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

Alte formule de calcul (extindere):

3a. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; **3b.** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

4a. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; **4b.** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; **6.** $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$.

Exemple:

1. $(3+x)^2=3^2+2\cdot 3\cdot x+x^2=9+6x+x^2$.

2. $(a-5)^2=a^2-2\cdot a\cdot 5+5^2=a^2-10a+25$.

3. $(x-2y+3z)^2=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot x\cdot 3z+2\cdot(-2y)\cdot 3z=$
$=x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$.

4. $(3x-2)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2+3\cdot(3x)\cdot 2^2-2^3=27x^3-54x^2+36x-8$.

Metode de descompunere în factori

A descompune în factori o expresie algebrică înseamnă a scrie expresia respectivă sub formă de produs. Pentru a descompune o expresie în factori, se poate folosi proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de scădere (metoda factorului comun), se pot utiliza formulele de calcul prescurtat sau metode combinate.

Metoda factorului comun se bazează pe proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunarea/scăderea numerelor reale:

$$ax+ay=a(x+y) \quad \text{şi} \quad ax-ay=a(x-y).$$

Exemple:

1. $3x-6=3(x-2)$; **2.** $ax+bx=x(a+b)$; **3.** $5x^2-10x=5x(x-2)$;

4. $x(2x+y)-7(2x+y)+(2x+y)^2=(2x+y)(x-7+2x+y)=(2x+y)(3x-7+y)$.

Utilizarea formulelor de calcul prescurtat (prin restrângerea formulei)

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

2. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; **3.** $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

4. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. **5.** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

6. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$. **7.** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

8. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

Exemple:

1. $1+10x+25x^2=1^2+2\cdot 1\cdot(5x)+(5x)^2=(1+5x)^2$;

2. $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=(2x-3y)^2$;

3. $4-b^2=2^2-b^2=(2-b)(2+b)$;

4. $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$.

Scanned with OKEN Scanner

Metode combinate de descompunere în factori

Exemple:

1. $2x+2y+ax+ay=(2x+2y)+(ax+ay)=2(x+y)+a(x+y)=(x+y)(2+a)$;

2. $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$;

3. Metoda I: $x^2+\underbrace{3x}_{x+2x}+2=x^2+x+2x+2=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$.

Metoda II: $x^2+3x+2=\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=(x+1)(x+2)$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $(x+3)^2-3$ este egal cu...
2. Rezultatul calculului $(x+2)^2-(x+1)(x-1)$ este...
3. Rezultatul calculului $\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este...
4. Rezultatul calculului $\left(2-\sqrt{3}\right)^2-(-4+5)$ este...
5. Știind că $x+y=1$, valoarea expresiei $(x+y)(x-y)+2y$ este egală cu...
6. Dacă $a+b=4$ și $a-b=2$, atunci a^2-b^2 este egal cu...
7. Un pătrat are latura de lungime $\sqrt{2}+1$ cm. Calculând aria pătratului se obține...
8. Rezultatul calculului $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ este...
9. Rezultatul calculului $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$ este...
10. Media geometrică a numerelor $x=5\sqrt{2}-7$ și $y=7+5\sqrt{2}$ este...
11. Media geometrică a numerelor $a=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$ și $b=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$ este...
12. Fie numerele naturale nenule: $x=a^2+a$, $y=a-1$ și $z=a^2-1$. Calculând $\frac{x\cdot y}{z}$ se obține...
13. Dacă $a^2-b^2=20$ și $a-b=4$, atunci $a+b$ este egal cu...
14. Dacă $x+\frac{1}{x}=7$, atunci valoarea expresiei $x^2+\frac{1}{x^2}$ este egală cu ...
15. După scoaterea factorului comun, expresia $2a-2b+2c$ este egală cu...
16. După scoaterea factorului comun, expresia $3x^3+6x^2-12x+24$ este egală cu...
17. Forma restrânsă a expresiei $4x^2+12x+9$ este...
18. Forma restrânsă a expresiei $9x^2-24xy+16y^2$ este...
19. Descompunând expresia x^4-81 în produs de trei factori se obține...
20. Descompunând expresia $16x^4-1$ în produs de trei factori se obține...

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Fie expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x-2)(x+2)-3x^2+14$, unde x număr real.

a) Arătaţi că $E(x)=x^2+6x+10$, oricare x număr real.

b) Calculaţi valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=-3$.

c) Arătaţi că $E(a)>0$, pentru orice valoare reală a numărului a.

22. Fie expresia $E(x)=x^2+x+5\sqrt{2}$. Calculaţi valoarea expresiei pentru $x=\sqrt{2}-3$.

23. Fie expresia $E(x)=(x+1)^2+2(x-7)+1$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $E(x)=(x-2)(x+6)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $E(-1)$.

c) Arătaţi că $E(x)+16\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

24. Fie expresia $E(x)=(x+5)^2+2(x+5)(x-4)+(x-4)^2$, cu $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $E(x)=(2x+1)^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $E(\sqrt{2})\cdot E(-\sqrt{2})$.

c) Calculaţi numărul real a pentru care $E(a)$ are cea mai mică valoare posibilă.

25. Se dă numărul $n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$, unde a, b şi c sunt cifre nenule în baza zece.

a) Arătaţi că n este divizibil cu 37.

b) Arătaţi că n^2 este divizibil cu 333, oricare ar fi cifrele nenule a şi b.

26. Fie numerele $a=\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ şi $b=\sqrt{9+2\sqrt{14}}$.

a) Arătaţi că $(a-b)^2=8$.

b) Calculaţi $\left(a-b+2\sqrt{2}\right)^{100}$.

27. Se dau numerele $x=\sqrt{4-\sqrt{7}}$ şi $y=\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

a) Calculaţi produsul $x\cdot y$.

b) Calculaţi $(x-y)^2$.

c) Arătaţi că $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ este număr întreg negativ.

28. Fie numerele $x=5\sqrt{2}-7$ şi $y=5\sqrt{2}+7$.

a) Calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

b) Demonstraţi că $x<\dfrac{1}{14}$.

c) Demonstraţi că $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{y^4}$ este număr natural.

29. Calculaţi valoarea numărului real $x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)^2-2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

30. *a)* Arătaţi că media geometrică a numerelor $x=2$ şi $y=6$ este mai mică decât media lor aritmetică.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că, dacă $a,b\geq 0$, atunci $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.

31. *a)* Arătați că numărul $\overline{x3}\cdot\overline{x5}+1$ este pătrat perfect, oricare ar fi x cifră în baza zece diferită de zero.

b) Numerele $\overline{ab}$ scrise în baza zece, cu a și b diferite de zero, îndeplinesc condiția $\overline{ab}-\overline{ba}=a\cdot b-a$. Determinați toate numerele $\overline{ab}$ care îndeplinesc condiția dată.

32. *a)* Arătați că numărul $a=9n^2+6n+1$ este pătrat perfect, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

b) Aflați valorile numerelor reale x și y pentru care expresia $E=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{9y^2+6y+10}$ are valoare minimă.

33. *a)* Arătați că numărul $p=y^2+4y+5$ este pozitiv pentru orice $y\in\mathbb{R}$.

b) Determinați cea mai mică valoare a numărului $A=\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{y^2+4y+5}$, unde x și y sunt numere reale.

34. *a)* Fie x un număr real astfel încât $x^2=3$. Calculați $(x+1)(x-1)$.

b) Fie x un număr real astfel încât $x^8=5$. Calculați $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$.

35. Se consideră numărul $n=(2x^2-3x+4)(2x^2-3x+2)+1$.

a) Calculați valorile lui n dacă $x=2$ și $x=3$.

b) Arătați că n este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural x.

36. Se știe că $a+b=10$.

a) Calculați $(a+b)^2$.

b) Determinați valoarea expresiei $a^2+2ab+b^2-25$.

c) Determinați valoarea expresiei $(a-b)^2+4ab+3(a+b)$.

37. Se știe că $x+y=5$, iar $xy=6$, unde $x,y\in\mathbb{R}^*$.

a) Calculați $(x+y)^2$.

b) Arătați că $x^2+y^2=13$.

c) Calculați valoarea numărului $a=(x-y)^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

38. Se consideră expresia $E=a^2+4a+6$.

a) Calculați valorile lui E dacă $a\in\{-1,0,2\}$.

b) Arătați că $E>0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

c) Descompuneți în factori expresia $E-11$.

39. Se consideră numărul $A=a^2+10a+26$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că A este pozitiv, oricare ar fi numărul real a.

b) Aflați valoarea lui a pentru care A are valoarea minimă și determinați acest minim.

40. Se consideră numărul $A=-4a^2+12a-11$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că A este negativ, oricare ar fi numărul real a.

b) Aflați valoarea lui a pentru care A are valoarea maximă și determinați acest maxim.

41. Știind că $x+y=3$ și $ax+ay+bx+by=\sqrt{27}$, calculați $a+b$.

Scanned with OKEN Scanner

42. Aflați numerele raționale a și b, dacă $a(\sqrt{2}+\sqrt{3})+b(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{18}+\sqrt{2}$.

43. ***a)*** Arătați că $x^2+y^2+4x-6y+13=(x+2)^2+(y-3)^2$.

b) Dacă $x^2+y^2+4x-6y+13=0$, determinați valorile numerelor reale x și y.

44. ***a)*** Arătați că $(x+2)^3-x-2=(x+1)(x+2)(x+3)$.

b) Arătați că numărul $a=\left[(x+2)^3-x-2\right]:(x+2)+1$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural x.

45. Un teren de formă triunghiulară are laturile exprimate, în hm, prin a, $a+2$, $2a-1$, unde $a\in\mathbb{N}^*$. Perimetrul terenului este 121 hm. Calculați lungimile laturilor terenului.

46. Un dreptunghi are laturile (exprimate în dm) de lungimi x, respectiv $x+2$, unde $x\in\mathbb{N}$. Dacă dreptunghiul are aria egală cu 15 dm^2, calculați perimetrul dreptunghiului.

47. Adi și Vlad au fiecare câte o sumă de bani. Adi are cu 20 lei mai mult decât Vlad. Dacă produsul sumelor celor doi băieți este 4800, aflați câți lei are fiecare.

48. Suma dintre vârsta Corinei și a Ralucăi este 16, iar diferența dintre pătratul vârstei Corinei și pătratul vârstei Ralucăi este 32.

a) Calculați diferența dintre vârsta Corinei și vârsta Ralucăi.

b) Câți ani au cele două fete?

49. Un pătrat are latura (exprimată în cm) de lungime x, unde $x\in\mathbb{N}$. Dacă se mărește latura pătratului cu 3 cm, se obține un nou pătrat cu aria de 0,81 dm^2. Aflați perimetrul pătratului inițial.

50. Un teren de formă pătratică are perimetrul egal cu $3a+5$ decametri, unde $a\in\mathbb{N}$.

a) Calculați, în funcție de a, aria terenului.

b) Dacă terenul are o suprafață egală cu a unui dreptunghi cu dimensiunile de 16 dam, respectiv 4 dam, aflați a.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.8

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Un raport în care termenii sunt expresii algebrice, se numeşte ***fracţie algebrică*** sau ***expresie algebrică raţională.***

O fracţie algebrică **nu** are valoarea definită pentru acele valori ale variabilelor care anulează numitorul.

Exemplu. Dacă $E(x)=x+2$ şi $G(x)=3x-6$, cu $G(x)\neq 0$, adică $x\neq 2$, atunci $F(x)=\frac{E(x)}{G(x)}=\frac{x+2}{3x-6}$, este o fracţie algebrică. Fracţia F ***este definită*** pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, numărul $F(a)=\frac{a+2}{3a-6}$ se numeşte ***valoarea fracţiei*** F în punctul a.

De exemplu $F(3)=\frac{3+2}{3\cdot 3-6}=\frac{5}{3}$.

Amplificarea. Prin amplificarea fracţiei algebrice $\frac{F(x)}{G(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia : $\overset{E(x))}{\frac{F(x)}{G(x)}}=\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$.

Simplificarea. Prin simplificarea fracţiei algebrice $\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia: $\frac{F(x)\cdot E(x)^{(E(x)}}{G(x)\cdot E(x)}=\frac{F(x)}{G(x)}$.

Observaţii.

1. Suma şi produsul a două fracţii algebrice sunt fracţii algebrice.
2. Dacă $F(x)=\frac{E(x)}{G(x)}$, cu $G(x)\neq 0$ şi $E(x)\neq 0$, atunci expresia $\left(F(x)\right)^{-1}=\frac{G(x)}{E(x)}$ este fracţie algebrică.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Fie raportul $E(x)=\frac{x^2+2}{2x^2-3}$. Calculând $E(2)$ se obţine...
2. Fie raportul $F(x)=\frac{1-2x^2}{x^2+1}$. Calculând $F(\sqrt{2})$ se obţine...
3. Fie raportul $F(x)=\frac{x^2+4x+6}{x-1}$. Mulţimea valorilor lui x pentru care raportul nu are sens este...

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie raportul $F(x)=\frac{x^3+2x^2+5}{x^2-9}$. Mulțimea valorilor lui x pentru care raportul are sens este...

5. Amplificând raportul $\frac{3x+1}{4x}$ cu $5x$, unde x este număr real diferit de zero, se obține...

6. Amplificând raportul $\frac{2x-3}{x+1}$ cu $x-1$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, se obține...

7. Simplificând raportul $\frac{6x^2y^3z^4}{2xy^2z^3}$ se obține...

8. Simplificând raportul $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ prin $x-2$ se obține...

9. Simplificând raportul $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ prin $x+3$ se obține...

10. Simplificând raportul $\frac{x^3+x^2+x}{x+x+x}$ se obține...

11. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$. După simplificare se obține...

12. Fie expresia $F(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$. După simplificare se obține...

13. Se consideră rapoartele $E(x)=\frac{x^2}{x+2}$ și $F(x)=\frac{x+3}{x-2}$. Numitorul comun al celor două rapoarte este...

14. Calculând $\frac{x^3}{y^2}:\frac{x^2}{y^2}$, unde x și y sunt numere reale diferite de zero, se obține...

15. Calculând $\left(-\frac{4x^2}{9y^5}\right):\frac{2x^2y}{15xy^2}$, unde x și y sunt numere reale diferite de zero, se obține...

16. Fie expresia $E(x)=\frac{3-x}{2x}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Efectuând calculul $E(\sqrt{2})+E(-\sqrt{2})$ se obține...

17. Calculând $\frac{x-3}{x+1}+\frac{2}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, se obține rezultatul...

18. Calculând $\frac{4}{x-1}-\frac{3+x}{x-1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, se obține rezultatul...

19. Efectuând calculul $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{3x}{x-3}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, se obține rezultatul...

20. Efectuând calculul $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right):\frac{x^2+y^2}{2xy}$, unde $x,y\in\mathbb{R}^*$, se obține rezultatul...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie expresia $E(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-4}$.

a) Pentru ce valori reale ale numărului x expresia $E(x)$ este bine definită?

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că $E(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$.

22. Considerăm raportul $F(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3}$, pentru orice număr rațional x.

a) Calculați $F(3)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $F(x)=1$.

23. Fie expresia $E(x)=\dfrac{x-3}{x+3}\cdot\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right):(x+3)^{-2}$.

a) Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,E(x) \text{ are sens}\}$.

b) Arătați că expresia $E(x)$ are valoare constantă, oricare ar fi $x\in A$.

24. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{x+1}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

b) Aflați numerele întregi x pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este număr întreg.

c) Rezolvați ecuația $E(x)=2$.

25. Se consideră fracția algebrică $F(x)=\dfrac{x^4+4x^2+3}{x^4+2x^2-3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

a) Arătați că $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

b) Determinați elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|E(x)|=1\}$.

26. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x^2-9}\right):\left(1+\dfrac{x^2+9}{x^2-9}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{5}{2x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$.

b) Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care $2a\cdot E(a)=a+6$.

27. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x^2-4}\right):\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)=\dfrac{1}{x+2}$, oricare ar fi x determinat la punctul *a)*.

c) Calculați media geometrică a numerelor $a=E(7)$ și $b=E\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

28. Fie raportul $F(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $F(x)=\frac{x+1}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{-2;0;2\}$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $2F(x)=x+2$.

c) Calculați suma $S=3\cdot F(3)+4\cdot F(4)+5\cdot F(5)+...+101\cdot F(101)+102\cdot F(102)$.

29. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+5}-\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{5-x}\right):\frac{2x^2+x-6}{25-x^2}$, cu $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5,-2,\frac{3}{2},5\right\}$.

a) Arătați că $(x+2)(2x-3)=2x^2+x-6$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=\frac{x+2}{2x-3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5,-2,\frac{3}{2},5\right\}$.

c) Aflați valorile întregi ale lui a, pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

30. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x+2}{x-5}-\frac{14}{x^2-8x+15}\right):\frac{1}{x^2-9}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3;5\}$.

a) Arătați că $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $E(x)=(x+3)(x+4)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3;5\}$.

c) Arătați că $E(a)$ este număr par, pentru orice $a\in\mathbb{N}-\{3;5\}$.

31. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2+\frac{2x-6}{x+3}+1\right]\cdot\frac{x+3}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{2x}{x+3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$.

b) Verificați dacă există numere naturale n, diferite de 0, pentru care $\frac{1}{n}\cdot E(n)$ este număr întreg.

c) Determinați numerele întregi x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

32. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2}{x^4+x^3}:\frac{(2x+1)(x-1)-x(x-1)}{(x+1)(2x-2)}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;0\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{2}{x(x+1)}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;0\}$.

b) Aflați toate numerele întregi a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

33. Fie $E(x)=\frac{3x}{3x^2+2x-1}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)-\frac{7x-3x^2}{9x^2-1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

a) Arătați că $(3x-1)(x+1)=3x^2+2x-1$, pentru orice x real.

b) Arătați că $E(x)=\frac{4x}{1+3x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

34. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{4}{x-1}-\frac{12-4x}{x^2-1}-\frac{2x+6}{x^2+4x+3}\right):\frac{1}{x+1}$.

a) Arătați că $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}$.

b) Arătați că $E(x)=6$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-1;1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinați numerele întregi $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-3;-1\}$ pentru care $\frac{2a+6}{a^2+4a+3}$ este număr întreg.

35. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-3x}-\frac{1}{x^2+3x}\right):\frac{2x+8}{x^3-9x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4;-3;0;3\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+3}{x+4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4;-3;0;3\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $|x+4| \cdot |E(x)| < 3$.

c) Aflați numerele întregi a pentru care $2 \cdot E(a)$ reprezintă un număr întreg.

36. Fie expresia $E(x)=\frac{x+1}{2x+3}:\left(\frac{x+4}{5x-5}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2};-1;1\right\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{5}{2x+3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2};-1;1\right\}$.

b) Determinați valorile reale ale numărului x pentru care $|E(x)| \le 1$.

c) Determinați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a)$ este număr întreg.

37. Considerăm expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;2\}$.

b) Determinați numerele întregi a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația $2E(x)+E(0)=3$.

38. Fie expresia $E(x)=\frac{11x+4}{10x+4}+\frac{25x^2-4}{5x^2-3x-2}:\frac{10x-4}{x-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5};1;\frac{2}{5}\right\}$.

a) Arătați că $5x^2-3x-2=(5x+2)(x-1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=\frac{8x+3}{5x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5};1;\frac{2}{5}\right\}$.

c) Demonstrați că $\frac{8x+3}{5x+2}$ este o fracție ireductibilă, pentru orice x număr natural.

39. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+x}-\frac{x+2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{x}{x^2-x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0;1\}$.

a) Simplificați raportul $\frac{x}{x^2-x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

b) Arătați că $x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x-1)(x+1)$, pentru orice x real.

c) Arătați că $E(x)=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0;1\}$.

d) Calculați valoarea sumei $S=1+E(2)+E(2^2)+...+E(2^{40})$.

40. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}+\frac{7}{1-x^2}\right)\cdot\left(x^2-1\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;-1;1\}$.

a) Demonstrați că $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$, pentru orice x real.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că $E(x)=(x+2)(x-2)$, oricare $x\in\mathbb{R}-\{-3;-1;1\}$.

c) Calculați valoarea numărului real a astfel încât $E(a)=a-4$.

41. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+2}{x^2+4x+4}-\frac{x}{x+2}\right):\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-2;1;2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{4-2x}{x+2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{-2;1;2\}$.

b) Calculați $E(\sqrt{5})\cdot E(-\sqrt{5})$.

c) Rezolvați ecuația $E(x)=1$.

42. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{x-3}{x}-1+\frac{x}{x-3}\right):\frac{2x^2-6x+18}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x-3}$, oricare $x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$.

b) Determinați valorile naturale ale numărului x pentru care $E(x)<0$.

c) Determinați valorile naturale ale numărului a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

43. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3x+6}{x^2+x-2}-\frac{2}{x+1}+\frac{4x}{x^2-1}\right):\frac{1}{x-1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-2;-1;1\}$.

a) Arătați că $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x)=5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{-2;-1;1\}$.

c) Arătați că numărul $N=1+5+5^2+5^3+...+5^{122}$ este divizibil cu 31.

44. Se consideră raportul $F(x)=\frac{(x^2+3x+4)^2-3(x^2+3x+4)+2}{(x^2-1)(x^2+3x+3)(x+2)}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care raportul $F(x)$ are sens.

b) Arătați că $(x^2+3x+4)^2-3(x^2+3x+4)+2=(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Simplificați $F(x)$.

d) Arătați că $F(x)>0$, pentru orice x număr natural mai mare decât 1.

45. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{4x+12}{x^2+2x-3}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x+4}{x^2-1}\right):\frac{3}{x^2-1}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-3;-1;1\}$.

a) Arătați că $\frac{4x+12}{x^2+2x-3}=\frac{4}{x-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{-3;1\}$.

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Calculați valoarea produsului $p=E(2)\cdot E(3)\cdot....\cdot E(100)$.

46. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{-5x-1}{x^2+4x+3}+\frac{2x}{x+1}+\frac{4}{x+3}\right):\frac{2x+3}{(x^2+3x)(x^2+3x+2)}$,

unde $x\in\mathbb{R}-\left\{-3;-2;-\frac{3}{2};-1;0\right\}$.

a) Calculați suma valorilor lui $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)$ nu are sens.

Scanned with OKEN Scanner

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Arătați că $E(n)$ se divide cu 6, oricare ar fi numărul natural n.

47. Se consideră expresia $E(x)=1+\frac{3}{x^2+4x+7}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)\in(1;2]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați partea întreagă a lui $E(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

48. Se consideră expresia $E(x)=6+\frac{2}{4x^2+4x+3}$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $E(x)\in(6;7]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculați partea întreagă a lui $E(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

49. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+1}\right):\frac{6}{x(x+1)(x-3)}$.

a) Calculați produsul valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu are sens.

b) Arătați că numărul $a=x^2+4E(x)+16$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}-\{0;3\}$.

c) Stabiliți dacă există $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{2}\cdot E(x)\in\mathbb{Q}$.

50. Se consideră suma $S=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+49)(x+50)}$, unde $x\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $S=\frac{50}{x(x+50)}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $|S\cdot x|=25$.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.9

Funcții

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numește *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numește *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției* f în punctul x.

Graficul funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul funcției f*. Avem și $G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcția numerică este o funcție al cărei domeniu de definiție și domeniu de valori ale unei funcții sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

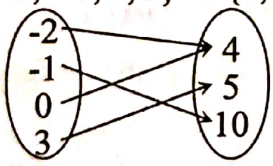
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x, y) \in G_f$ îi putem asocia un punct $M(x, y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x, y)$, cu $(x, y) \in G_f$ se numește *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

Funcții egale. Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1. Printr-o ***diagramă***.

$f : \{-2; -1; 0; 3\} \to \{4; 5; 10\}$,



2. Printr-un ***tabel***.

$g : \{-1; 0; 2; 5\} \to \{1; 2; 3\}$.

x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3. Prin una sau mai multe formule analitice:

$$h : \{0,2,4\} \to \{0,4,16\},\ h(x) = x^2; \qquad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) = \begin{cases} 3x - 5, \text{ dacă } x \le 1 \\ 2x + 3, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$$

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

Definiție. Funcția de tipul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește *funcție liniară*. Dacă $a \neq 0$, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, se numește *funcție de gradul* I.

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții liniare este o *dreaptă*.

1. Dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, funcția liniară $f(x) = ax$ are ca reprezentare geometrică o dreaptă

Scanned with OKEN Scanner

care conține originea sistemului de coordonate.

2. Dacă $a=b=0$, funcția liniară $f(x)=0$ este *funcția constantă nulă*, a cărei reprezentare geometrică este axa Ox.
3. Dacă $a=0$ și $b\neq 0$, funcția liniară $f(x)=b$ este o *funcție constantă nenulă*, a cărei reprezentare geometrică este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Funcții liniare egale. Funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$ sunt egale dacă și numai dacă $a=c$ și $b=d$.

Intersecțiile graficului unei funcții de gradul întâi cu axele de coordonate

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{G}_f\cap Ox=A\left(-\frac{b}{a},0\right) \qquad \text{și} \qquad \mathcal{G}_f\cap Oy=B(0,b).$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Valoarea funcției pentru $x=2$ este egală cu ... .
2. Valoarea produsului $f(-2)\cdot f(3)$ este egală cu ..., unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$, atunci valoarea de adevăr propoziției "Punctul $A(0;2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f" este ... .
4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-3$. Dacă punctul $B(a;8)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului a este egală cu ... .
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-7$. Dacă punctul $C(4;b)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului b este egală cu ... .
6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Soluția ecuației $3\cdot f(x)=15$ este egală cu ... .
7. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este punctul $A(...;...)$.
8. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+4$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox este punctul $B(...;...)$.
9. Fie $f:\{1;2\}\to\{a;b\}$, $f(x)=x+1$. Valoarea sumei $a+b$ este egală cu ... .
10. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$ și $D(x;x)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărul x este egală cu ... .
11. Dacă punctul $C(2;3)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-a$, atunci valoarea reală a numărului a este egală cu ... .
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+8$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu abscisa egală cu 3 are coordonatele $(...;...)$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-x$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu ordonata egală cu 7 are coordonatele $(\ldots;\ldots)$.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Punctul de pe reprezentarea grafică a funcției f cu abscisa egală cu dublul ordonatei are coordonatele $(\ldots;\ldots)$.

15. Dacă $f:\{a,b\}\to\{4,6\}$, $f(x)=x-1$, valoarea produsului $a\cdot b$ este egală cu $\ldots$.

16. Se dă funcția $f:\{-2;-1;0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Rezultatul calculului $f(-2)+f(-1)-f(0)$ este egal cu $\ldots$.

17. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt{3}-2)x-5$. Valoarea funcției pentru $x=\sqrt{3}+2$ este egală cu $\ldots$.

18. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x+2m$. Dacă punctul $A(2;2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci valoarea reală a numărului m este egală cu $\ldots$.

19. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-8$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa ordonatelor este punctul $C(...;...)$.

20. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9-3x$, atunci intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa absciselor este egală cu $\ldots$.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-3$.

a) Determinați numerele reale m astfel încât punctul $A(m;1)$ să aparțină reprezentării grafice a funcției f.

b) Pentru $m=-2$, calculați distanța de la originea axelor la reprezentarea grafică a funcției f.

22. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$, cu m și n numere reale. Punctele $A(2;m)$ și $B(3;6)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.

a) Arătați că $m=3$ și $n=-3$.

b) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că are loc egalitatea $f(5)+f(9)=2\cdot f(7)$

b) Determinați funcția f, știind că punctele $A\left(0;\sqrt{2}\right)$ și $B\left(\sqrt{3};4\sqrt{2}\right)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.

24. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-3)x+b+1$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determinați numerele a și b știind că punctele $A(-2;2)$ și $B(3;2)$ aparțin graficului funcției.

b) Pentru $a=3$ și $b=2$, reprezentați grafic funcția obținută.

25. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$.

a) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g.

Scanned with OKEN Scanner

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-\sqrt{3})\cdot x-\sqrt{3}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, inecuația $f(x)+1\geq 0$.

b) Determinați numerele raționale a și b pentru care punctul $M(a+1;\, b\sqrt{3})$ aparține graficului funcției f.

27. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+6$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot f(x)-f(1)=f(2)$.

b) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Calculați suma $S=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(25)$.

29. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.

a) Comparați numerele $f(\sqrt{2}-1)$ și $f(\sqrt{2})$.

b) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

30. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=0,5\cdot x+1$.

a) Reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe perpendiculare xOy

b) Demonstrați că punctul $O(0;0)$ este egal depărtat de reprezentările grafice ale funcțiilor f și g.

31. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

32. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+3$.

a) Determinați valoarea reală a numărului a știind că punctul $A(2a,3a)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

b) Calculați aria triunghiului format de axa ordonatelor, axa absciselor și reprezentarea grafică a funcției f.

33. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x+3a+4$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile numărului real a pentru care punctul $A(a;0)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

b) Pentru $a=2$, reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

34. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{4}x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe perpendiculare xOy.

b) Determinați valoarea numărului real m știind că punctul $A(m;2)$ aparține graficului funcției f.

35. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-\sqrt{3})\,x+\sqrt{3}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, inecuația $f(x)-1\geq 0$.

b) Arătați că punctul $A(1,1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

36. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Punctele $A(1;2)$ și $B(2;3)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției f.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Determinați valorile numerelor reale a și b.

37. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Determinați valorile numărului real a pentru care punctul $A(2|a|;7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

38. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Rezolvați ecuația $5\cdot f(x+1)=2x+11$.

39. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Calculați distanța de la punctul $A(1;0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

40. Fie funcția $f:\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Calculați distanța dintre cele două puncte ale reprezentării grafice a funcției f.

41. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.
a) Pentru $a=1$ și $b=0$, reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Determinați valorile reale ale numerelor a și b, știind că punctul $A(0;4)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției f, iar distanța de la originea O a sistemului de axe perpendiculare xOy la reprezentarea grafică a funcției f este egală cu $2\sqrt{3}$.

42. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Fie punctele $A(0;f(0))$ și $B(2;f(2))$. Determinați coordonatele punctului C situat pe axa Ox astfel încât $AC=BC$.

43. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Calculați $S=f(-1)+f(1)+f(3)+\ldots+f(55)$.

44. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Dacă punctul A' este simetricul punctului $A(2,f(2))$ față de origine, determinați lungimea segmentului $[AA']$.

45. Fie funcția $f:\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$.
a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy.
b) Calculați distanța dintre cele două puncte ale reprezentării grafice a funcției f.

46. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.
a) Demonstrați că punctele $A(1;3)$, $B(2;4)$ și $C(5;7)$ sunt coliniare.
b) Calculați distanța de la originea O a sistemului de axe perpendiculare xOy la

Scanned with OKEN Scanner

reprezentarea grafică a funcției f.

47. Se dau punctele $A(1;3)$ și $B(2;4)$.

a) Dacă punctele A și B aparțin reprezentării grafice a funcției f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, atunci determinați numerele reale a și b.

b) Pentru $a=2$ și $b=2$, reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

48. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.

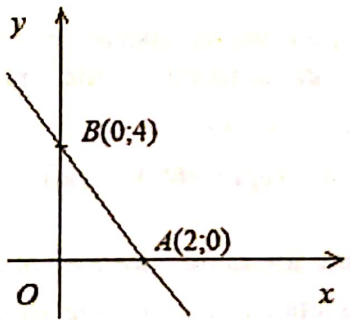
a) Verificați dacă punctele $A(3;6)$, $B(4;10)$ și $C(1;1)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f.

b) Determinați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate.

49. Reprezentați grafic într-un sistem de axe perpendiculare xOy rezultatele obținute de un grup de elevi la un test. Rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

50. Reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ este prezentată mai jos.



a) Determinați numerele reale a și b.

b) Calculați perimetrul triunghiului AOB.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 1.10

Ecuații, inecuații, sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, al inecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

Ecuații de gradul I cu o necunoscută și ecuații echivalente

O ecuație de forma $ax+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienți* (a este coeficientul necunoscutei, iar b se numește și termen liber), iar x se numește *necunoscută* sau *variabilă*.

Se numește *soluție* a ecuației $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$, un număr $x_0\in\mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0+b=0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor* ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x\in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M=\mathbb{R}$.

Exemple.

1. Ecuația $2x-6=0$ are soluția $x_0=3$, deoarece $2\cdot 3-6=0$ și $3\in\mathbb{R}$.
2. Ecuația $3x+9=0$, $x\in\mathbb{N}$, nu are soluții, deoarece propoziția $3x_0+9=0$ este adevărată doar dacă $x_0=-3$, iar $-3\notin\mathbb{N}$. Se observă că ecuația $3x+9=0$, $x\in\mathbb{Q}$, are soluția $x_0=-3$.

Pentru a rezolva o ecuație, adică pentru a afla soluțiile sale, putem folosi proprietățile relației de egalitate, obținând egalități echivalente. În general, vom încerca să ajungem la o egalitate de forma $x=a$, care este cea mai simplă ecuație, și care are doar soluția $x_0=a$.

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții. În mod evident, două ecuații echivalente au aceeași mulțime a soluțiilor.

Pentru a obține ecuații echivalente cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:

- trecem termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- adunăm / scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim / împărțim ambii membri ai ecuației cu un factor nenul.

Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

Un *sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute* are forma

$$(S)\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases},\quad \text{unde } a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R} \text{ și } x\in\mathbb{R}.$$

O pereche de numere reale (x_0,y_0) se numește *soluție a sistemului* (S), dacă ea este soluție pentru fiecare ecuație a sistemului. *A rezolva* sistemul (S), înseamnă a determina mulțimea S a soluțiilor sistemului.

Două sisteme se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.

Metodele uzuale de rezolvare a sistemelor de forma (S) sunt: metoda reducerii, metoda *substituției* și metoda *grafică*. Aceasta din urmă conduce numai la estimarea soluțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda substituției presupune exprimarea uneia dintre necunoscute în funcție de cealaltă dintr-o ecuație și înlocuirea (substituirea ei) în cealaltă ecuație. În acest fel se formează o ecuație de gradul I cu o singură necunoscută, care se rezolvă.

Exemplu: $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ 2x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ 2(3y+2)-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$.

Metoda reducerii constă în formarea unui sistem echivalent cu cel dat prin înmulțirea uneia sau a ambelor ecuații cu numere reale nenule astfel încât coeficienții unei necunoscute să fie numere opuse, după care se adună ecuațiile membru cu membru, obținându-se o ecuație de gradul I cu o necunoscută care se rezolvă.

Exemplu: $\begin{cases} 3x-4y=1 \ \ |\cdot 3 \\ 2x+3y=12 \ |\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-12y=3 \\ 8x+12y=48 \end{cases}$.

Adunând cele două ecuații se obține $17x=51 \Leftrightarrow x=3$. Din prima ecuație a sistemului inițial obținem $9-4y=1$, de unde $y=2$.

Inecuații de gradul I. Fie $E(x)=ax+b$, unde $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *O inecuație de gradul I cu necunoscuta* $x \in \mathbb{R}$ este o propoziție cu variabilă $x \in \mathbb{R}$ de forma

$E(x) \leq 0$ sau $E(x) \geq 0$ sau $E(x) < 0$ sau $E(x) > 0$.

Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $E(\alpha) \leq 0$ se numește *soluție* a inecuației $E(x) \leq 0$.

A rezolva o inecuație de forma $E(x) \leq 0$, înseamnă *a determina mulțimea* $S=\{\alpha \in \mathbb{R} \mid E(\alpha) \leq 0\}$, numită *mulțimea de soluții*. De regulă, mulțimile de soluții ale inecuațiilor pentru care $E(x)=ax+b$ sunt intervale.

Două *inecuații* sunt *echivalente* dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru rezolvarea inecuațiilor se folosesc proprietățile operațiilor cu numere reale în raport cu relația de inegalitate.

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/sistemelor de ecuații

Pentru rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații, se parcurg, în general, următoarele etape:

1. Stabilirea datelor cunoscute și a celor necunoscute.
2. Notarea uneia sau a două dintre datele necunoscute cu câte o literă.
3. Scrierea unei ecuații sau a unui sistem, numit modelul matematic al rezolvării problemei, folosind legătura dintre datele problemei.
4. Rezolvarea ecuației/sistemului (și proba rezolvării ecuației/sistemului).
5. Analiza soluției și formularea răspunsului la cerințele problemei (și proba rezolvării problemei).

Exemplu: Mama are 31 de ani, iar fiul are 7 ani. Peste câți ani vârsta fiului va fi de trei ori mai mică decât vârsta mamei?

Rezolvarea se face parcurgând etapele de mai sus.

1. Se cunosc vârstele din prezent ale mamei (31 ani) și fiului (7ani) și nu știm peste câți ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului.
2. Notăm cu x numărul de ani peste care vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului.

Scanned with OKEN Scanner

3. Peste x ani mama va avea $31+x$ ani, iar fiul va avea $7+x$ ani, deci are loc egalitatea: $31+x=3(7+x)$. Această ecuație este modelul matematic al problemei.

4. Rezolvăm ecuația: $31+x=3(7+x) \Leftrightarrow 31+x=21+3x \Leftrightarrow 10=2x \Leftrightarrow x=5$.
Proba: $31+5=3(7+5) \Leftrightarrow 36=36$ (A), deci $S=\{5\}$.

5. Răspunsul la cerința problemei. Peste 5 ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului. Proba: mama va avea $31+5=36$ ani, iar fiul $7+5=12$, iar $36:12=3$.

Probleme propuse

1. Soluția ecuației $2x+0,5=\frac{3}{2}$ este numărul rațional .... .

2. Rezolvând ecuația $3x-\frac{2}{5}=2,6$, obținem soluția .... .

3. Dacă $\frac{x}{4}=3,25$, atunci x este egal cu .... .

4. Soluția ecuației $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=1$ este numărul natural .... .

5. Se știe că $y\sqrt{2}+y\sqrt{3}=3$ .Atunci y este egal cu .... .

6. Soluția pozitivă a ecuației $x^2-3x=4$ este egală cu ... .

7. Soluția negativă a ecuației $y^2=13$ este egală cu ... .

8. Rezolvând ecuația $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=1$, obținem soluția ... .

9. Soluția naturală a inecuației $3x-1<2$ este egală cu ... .

10. Soluția în $\mathbb{Z}$ a inecuației $3(x+1)<-18$ este ... .

11. Rezolvând în $\mathbb{Z}$ inecuația $2(x+5)+3\leq -9$, obținem soluția ... .

12. Numerele întregi care verifică $|x+1|<3$ sunt ... .

13. Soluția inecuației $|2x+3|\leq 0$ este ... .

14. Numerele reale care verifică $|4x-5|\leq 3$ sunt ... .

15. Soluția inecuației $x^2-6x+9\leq 0$ este ... .

16. Rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuația $y^2+10y>-25$, obținem soluția ... .

17. Soluția reală a inecuației $|3x-2|>4$ este ... .

18. Soluția întreagă a inecuației $\frac{x-2}{3-x}\geq 0$ este ... .

19. Soluția naturală a inecuației $x^2+x-2<0$ este ... .

20. Soluția sistemului $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ este ... .

Scanned with OKEN Scanner

21. Soluția sistemului $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$ este ... .

22. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+y=0 \end{cases}$, obținem soluția ... .

23. Soluția sistemului $\begin{cases} 13x-7y=6 \\ 7x+13y=20 \end{cases}$ este ... .

24. Numerele reale care verifică sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ \sqrt{8}x-\sqrt{27}y=-5 \end{cases}$ sunt ... .

25. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{14}{x}-\frac{6}{y}=6 \\ \frac{12}{x}+\frac{18}{y}=9 \end{cases}$ este reprezentată de ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

26. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $\frac{4}{3}x+1=x+5,(3)$.

27. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $\frac{1}{7}[x-0,(23)]=\frac{5}{14}$.

28. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $|2x+3|=17$.

29. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\frac{x+6}{7}+...+\frac{x+99}{100}=96$.

30. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x+1)^2+(3x-1)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$.

31. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x-2}{2x+1}=\frac{3x-2}{6x+5}$.

32. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $y^2-6y+8=0$.

33. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuația $(y-2)^2+(y+1)^2=17$.

34. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, știind că $\frac{x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x+1}=\frac{5}{2}$.

35. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $7x-3(x-1)<5(x-2)+3(x-3)$.

36. Să se determine toate numerele întregi ce verifică $|3x-7|<5$.

37. Determinați toate numerele naturale x știind că $(x+1)^2+(2x-3)^2\le(2x-4)^2+(x-6)^2$.

38. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $|x-1|+|2-2x|<6$.

39. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația $\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}<5$.

40. Determinați toate numerele reale care verifică inecuația $\frac{x+3}{x^2+1}\ge 0$.

Scanned with OKEN Scanner

41. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x+3}{x-1}<1$.

42. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, știind că $\frac{x+2}{x-3}-\frac{3-x}{x+2}\geq -2$.

43. Se consideră sistemul de ecuații: $\begin{cases}3x-11y=11\\17x-5y=5\end{cases}$. Să se determine $(x+y)^{2013}$.

44. Se dă sistemul de ecuații: $\begin{cases}3x+6y=12\\-2x-4y=-8\end{cases}$.

a) Să se determine trei perechi de numere reale care să reprezinte soluții pentru sistemul de mai sus.

b) Să se găsească soluția care verifică $x+y=0$.

45. Numerele reale x și y verifică ecuațiile: $\begin{cases}13x+3y=10\\3x-13y=-10\end{cases}$. Calculați $(5y-8x)^{2012}$.

46. Fie sistemul de ecuații: $\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=5\\\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=11\end{cases}$.

Să se demonstreze că sistemul are soluție unică și să determine respectiva soluție.

47. Fie sistemul de ecuații: $\begin{cases}3x^2+4y^2=19\\17x^2-3y^2=5\end{cases}$.

a) Să se demonstreze că sistemul de mai sus nu are soluție unică.

b) Să se determine soluția reprezentată prin două numere pozitive.

48. Diferența a două numere naturale este 226. Dacă la scăzător adunăm 2, atunci el devine de 8 ori mai mic decât descăzutul. Determinați cele două numere.

49. Suma a două numere naturale este de 6 ori mai mare decât diferența lor. Dacă din numărul mai mic se scade 11 se obține un număr de doua ori mai mic decât suma dintre numărul mai mare și 8. Aflați cele două numere.

50. Calculați diferența dintre numărul care împărțit la 43 dă câtul 51 și restul 29 și numărul care împărțit la 51 dă câtul 29 și restul 43.

51. Ce cantitate de fructe se află într-un depozit dacă după ce mai sunt aduse 432 kg și apoi distribuite la 5 magazine câte 72 kg și la 8 magazine câte 46 kg au rămas în depozit 377 kg?

52. În biblioteca unui elev, pe unul dintre rafturi se află 60 de cărți. Pe fiecare dintre celelalte rafturi se află câte 50 de cărți. Dacă elevul ar așeza câte 60 de cărți pe un raft, atunci ar rămâne 4 rafturi fără nici o carte.

a) Câte rafturi are biblioteca?

b) Câte cărți sunt în biblioteca elevului?

53. Într-o cantină sunt mese cu patru picioare și mese cu 3 picioare, în total 17 mese. Știind că toate mesele au la un loc 63 de picioare, aflați câte mese cu câte trei picioare sunt.

54. Diferența a două numere este 108. Determinați numerele știind că unul dintre ele este cu 48 mai mare decât de 11 ori celălalt număr.

Scanned with OKEN Scanner

55. Cantitatea de 552 kg de struguri s-a dus la un magazin în lăzi mici de câte 8 kg fiecare şi în lăzi mari de câte 12 kg fiecare. Ştiind că numărul lăzilor mari este cu 6 mai mare decât numărul lăzilor mici, determinaţi câte lăzi s-au adus din fiecare fel.

56. Un elev îşi propune să citească 375 de pagini dintr-o carte şi constată următoarele:

a) dacă în fiecare zi ar citi cu 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă, ar termina de citit ce şi-a propus în 5 zile. Câte pagini trebuie să citească în prima zi?

b) dacă în fiecare zi ar citi un număr de pagini egal cu dublul celor citite în ziua precedentă ar termina de citit ce şi-a propus în 4 zile. Câte pagini ar trebui să citească în prima zi?

57. Fiul, tatăl si bunicul au suma vârstelor egală cu 103 ani. Peste trei ani, vârsta bunicului va fi de două ori mai mare decât vârsta tatălui, iar vârsta tatălui va fi de cinci ori mai mare decât vârsta fiului. Aflaţi ce vârstă are tatăl în prezent.

58. Tatăl şi fiul au împreună 48 de ani. Tatăl este de trei ori mai în vârstă decât fiul. Peste câţi ani vârsta tatălui va fi de două ori mai mare decât vârsta fiului?

59. În trei depozite se află 600 tone de grâu. Dacă din primul depozit se transferă 20 tone în al doilea şi 25 tone în al treilea, atunci în cele trei depozite se află cantităţi egale de grâu.

a) Cu câte tone de grâu este mai mare cantitatea de grâu din al doilea depozit faţă de cantitatea din al treilea depozit?

b) Aflaţi câte tone de grâu se află în fiecare depozit.

60. Mama este cu 18 de ani mai în vârstă decât fiica, iar peste 3 ani mama va fi de 3 ori mai în vârstă decât fiica sa.

a) Câţi ani are în prezent fiica?

b) În urmă cu câţi ani vârsta mamei era de 7 ori mai mare decât vârsta fiicei?

INESCU • C. LAZĂR

Scanned with OKEN Scanner

Geometrie
Clasele VI-VIII

2

Tema 2.1. Unghiuri. Triunghiuri
(clasa a VI-a)

Tema 2.2. Patrulatere
(clasa a VII-a)

Tema 2.3. Asemănare
(clasa a VII-a)

Tema 2.4. Relaţii metrice
(clasa a VII-a)

Tema 2.5. Cercul
(clasa a VII-a)

Tema 2.6. Incidenţă, paralelism şi perpendicularitate în spaţiu
(clasa a VIII-a)

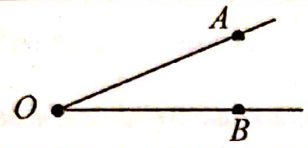
Tema 2.7. Corpuri geometrice. Arii şi volume
(clasa a VIII-a)

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.1
Unghiuri. Triunghiuri

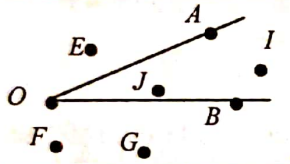
1. Unghiuri

Definiție. Reuniunea a două semidrepte închise, cu aceeași origine, se numește unghi: $[OA \cup [OB = \sphericalangle AOB$.

desen	citire	notație
	Unghiul AOB; sau unghiul BOA; sau unghiul O.	$\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$; $\sphericalangle O$.

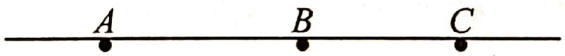
Elementele unui unghi. Originea comună a celor două semidrepte se numește *vârful unghiului*. Cele două semidrepte închise se numesc *laturile unghiului*.

Pozițiile relative ale unui punct față de un unghi

desen	citire	notație
	A, O și B aparțin unghiului $\sphericalangle AOB$; I și J se află în interiorul $\sphericalangle AOB$; E, F și G se află în exteriorul $\sphericalangle AOB$;	$A,O,B \in \sphericalangle AOB$ $I,J \in Int\sphericalangle AOB$ $E,F,G \in Ext\sphericalangle AOB$

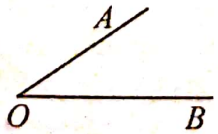
Tipuri de unghiuri.
Unghiul nul este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte identice.
Unghiul alungit este unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse.

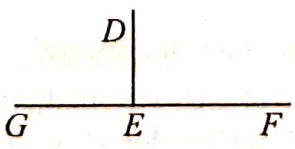
Unghi impropriu. Unghi propriu. Unghiul nul și unghiul alungit se numesc *unghiuri improprii*. Unghiul care nu este, nici nul și nici alungit, se numește *unghi propriu*.

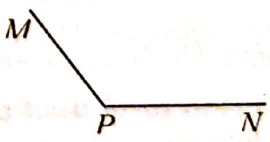
Exemplu: 

Unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle ACB$ sunt unghiuri nule, iar $\sphericalangle ABC$ este unghi alungit.

Clasificarea unghiurilor proprii
Unghiul ascuțit este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 0° și 90°.
Unghiul drept este unghiul a cărui măsură este egală cu 90°.
Unghiul obtuz este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 90° și 180°.


unghiul ascuțit $\widehat{AOB}$


unghiul drept $\widehat{DEF}$

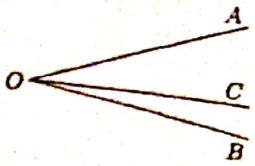

unghiul obtuz $\widehat{MPN}$

Observație. Orice unghi nul are măsura de 0°, iar orice unghi alungit are măsura de 180°.

Unghiuri congruente. Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc *unghiuri congruente*.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiuri adiacente. Două unghiuri proprii care au vârf comun, o latură comună, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte şi de alta a laturii comune se numesc *unghiuri adiacente.*

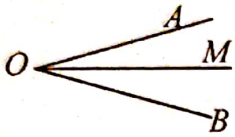


Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente, atunci O este *vârful comun* al unghiurilor, $[OC$ este *latura comună*, iar $[OA$ şi $[OB$ sunt *laturile situate de o parte şi de alta a laturii comune.*

Observaţii. 1. $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \text{Int}(\sphericalangle BOC) = \varnothing$.

2. Un unghi impropriu nu poate fi adiacent cu nici un alt unghi.

Bisectoarea unui unghi propriu. Semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente, se numeşte *bisectoare.*



$$\left.\begin{array}{l}[OM \subset \text{Int}(\sphericalangle AOB) \\ \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM\end{array}\right| \Leftrightarrow [OM \text{ este bisectoarea unghiului } \sphericalangle AOB.$$

Unghiuri complementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 90° se numesc unghiuri *complementare.* Fiecare dintre cele două unghiuri este *complementul* celuilalt.

Proprietăţile unghiurilor complementare

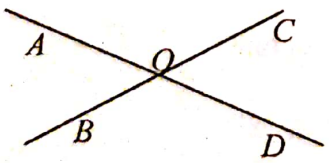
a. Complementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $90° - x$.
b. Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura de 45°.
c. Unghiurile congruente au complemente congruente.
d. Unghiurile care au acelaşi complement sunt congruente.

Unghiuri suplementare. Două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 180° se numesc *unghiuri suplementare.* Fiecare dintre cele două unghiuri este *suplementul* celuilalt.

Proprietăţile unghiurilor suplementare

a. Suplementul unui unghi cu măsura egală cu x este un unghi de măsură $180° - x$.
b. Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare este un unghi drept.
c. Unghiurile congruente au suplemente congruente.
d. Unghiurile care au acelaşi suplement sunt congruente.
e. Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

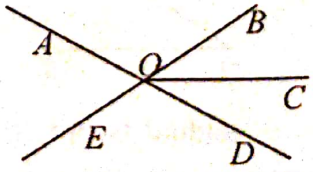
Unghiuri opuse la vârf. Două unghiuri proprii cu laturile unuia semidrepte opuse cu laturile celuilalt se numesc *unghiuri opuse la vârf.*



$$\frac{\begin{array}{c}[OA \text{ şi } [OD \text{ sunt semidrepte opuse} \\ [OB \text{ şi } [OC \text{ sunt semidrepte opuse}\end{array}}{\begin{array}{l}\sphericalangle AOB \text{ şi } \sphericalangle COD \text{ sunt unghiuri opuse la vârf} \\ \sphericalangle AOC \text{ şi } \sphericalangle BOD \text{ sunt unghiuri opuse la vârf}\end{array}}$$

Teoremă. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

Unghiuri în jurul unui punct. Trei sau mai multe unghiuri care au vârful comun, au interioarele disjuncte două câte două şi au proprietatea că orice punct al planului se află pe o latură sau în interiorul unuia dintre unghiuri, se numesc *unghiuri în jurul unui punct.*



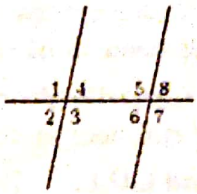
În figură, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ şi $\sphericalangle EOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor din jurul unui punct este egală cu 360°.

Unghiuri determinate de o secantă şi două drepte paralele

Teoremă. Două drepte paralele, intersectate de o secantă, formează perechi de unghiuri:



a. alterne interne congruente: $\hat{4} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{5}$

b. alterne externe congruente: $\hat{1} \equiv \hat{7}$, $\hat{2} \equiv \hat{8}$

c. corespondente congruente: $\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$

d. interne de aceeaşi parte a secantei, suplementare: $m(\hat{4}) + m(\hat{5}) = m(\hat{3}) + m(\hat{6}) = 180°$.

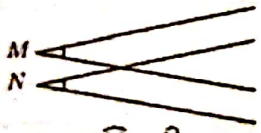
e. externe de aceeaşi parte a secantei, suplementare: $m(\hat{1}) + m(\hat{8}) = m(\hat{2}) + m(\hat{7}) = 180°$.

Teorema reciprocă. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează două unghiuri alterne interne congruente sau alterne externe congruente sau corespondente congruente sau interne de aceeaşi parte a secantei suplementare sau externe de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

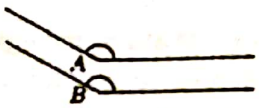
Unghiuri cu laturi paralele. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt:

a. congruente, dacă sunt de acelaşi fel (adică sunt ambele ascuţite, obtuze sau drepte)

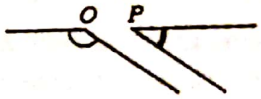
b. suplementare dacă unul este ascuţit şi celălalt obtuz.



$\hat{M} \equiv \hat{N}$

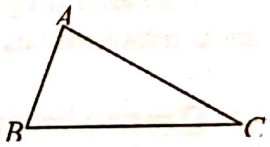


$\hat{A} \equiv \hat{B}$



$m(\hat{O}) + m(\hat{P}) = 180°$

2. Triunghiuri



Definiţie. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Se numeşte *triunghi* figura formată din reuniunea semidreptelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[CA]$.

$$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

Elementele triunghiului

◊ segmentele $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$ se numesc *laturile triunghiului ABC.*

◊ $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ se numesc *unghiurile triunghiului ABC.*

◊ punctele A, B, C se numesc *vârfurile triunghiului ABC.*

Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor sale. Lungimile laturilor triunghiului ABC se notează frecvent astfel: $a = BC$, $b = AC$ şi $c = AB$. În acest caz, *perimetrul* triunghiului ABC este $P = a + b + c$, iar *semiperimetrul* este $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Clasificarea triunghiurilor în funcţie de lungimile laturilor

a. *Triunghiul oarecare* (*scalen*) este triunghiul în care lungimile laturilor, exprimate în aceeaşi unitate de măsură, au valori diferite.

b. *Triunghiul isoscel* este triunghiul care are două laturi congruente. Latura necongruentă se numeşte *bază.*

c. *Triunghiul echilateral* este triunghiul care are toate laturile congruente.

Clasificarea triunghiurilor în funcţie de măsurile unghiurilor

a. *Triunghiul ascuţitunghic* este triunghiul care are toate unghiurile ascuţite.

b. *Triunghiul dreptunghic* este triunghiul care are un unghi drept. Latura opusă unghiului

Scanned with OKEN Scanner

drept se numeşte *ipotenuză*, iar laturile alăturate unghiului drept se numesc *catete*.

c. *Triunghiul obtuzunghic* este triunghiul care are un unghi obtuz.

Congruenţa triunghiurilor. Triunghiurile care au elementele corespunzătoare, congruente două câte două, se numesc *triunghiuri congruente*.

Cazurile de congruenţă. Pentru a arăta că două triunghiuri date sunt congruente este suficient să verificăm trei congruenţe, dintre care cel puţin o congruenţă de laturi.

Cazul L.U.L. Două triunghiuri care au două laturi şi unghiul determinat de ele, respectiv congruente sunt congruente.

Cazul U.L.U. Două triunghiuri care au o latură şi unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt congruente.

Cazul L.L.L. Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente.

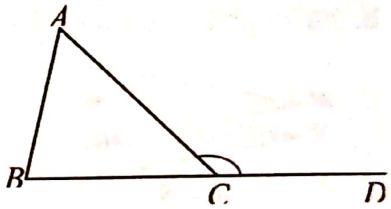
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Teoremă. În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Consecinţe. **1.** Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuţite sunt complementare.

2. Toate unghiurile triunghiurilor echilaterale au măsura de 60°.

Unghiul exterior triunghiului ABC este unghiul adiacent şi suplementar unui unghi al triunghiului.



Exemplu. Unghiul $\widehat{ACD}$ este unghi exterior triunghiului ABC, unde $[CD$ este semidreapta opusă semidreptei $[CB$.

Observaţie. Un triunghi are şase unghiuri exterioare, două câte două opuse la vârf.

Teorema unghiului exterior. Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

Drepte importante în triunghi

Înălţimea este perpendiculara construită dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă.

Dreptele care conţin înălţimile oricărui triunghi sunt concurente într-un punct numit ortocentrul triunghiului, notat, de regulă, cu H.

Mediana este segmentul care uneşte un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

În orice triunghi, medianele sunt concurente într-un punct G, numit centru de greutate al triunghiului. Pe fiecare dintre mediane, G se află la două treimi de vârf şi o treime de bază.

Bisectoarele unui triunghi sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului.

În orice triunghi, bisectoarele sunt concurente într-un punct notat de regulă cu I, care este centrul cercului înscris în triunghi.

Mediatoarele unui triunghi sunt mediatoarele laturilor triunghiului.

În orice triunghi, mediatoarele sunt concurente într-un punct notat de regulă cu O, care este centrul cercului circumscris triunghiului.

Linia mijlocie a unui triunghi este segmentul care uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi.

Triunghiul care are ca laturi liniile mijlocii ale triunghiului ABC se numeşte triunghi *median* al triunghiului ABC. Vârfurile triunghiului median sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

În orice triunghi, orice linie mijlocie este paralelă cu latura pe care nu o intersectează (a treia) și are lungimea cât jumătate din lungimea acesteia.

Proprietățile triunghiului isoscel

Teoreme referitoare la unghiurile alăturate bazei

1. Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.
2. Dacă un triunghi are două unghiuri congruente atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la bisectoare și înălțime

1. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului format de laturile congruente este inclusă în înălțimea corespunzătoare bazei.
2. Într-un triunghi isoscel înălțimea din vârful opus bazei conține și bisectoarea unghiului.
3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la bisectoare și mediană

1. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului format de laturile congruente conține mediana corespunzătoare bazei triunghiului.
2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în bisectoarea unghiului opus bazei.
3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și mediana corespunzătoare laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la înălțime și mediană

1. Într-un triunghi isoscel înălțimea coborâtă din vârful opus bazei conține mediana corespunzătoare acesteia.
2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în înălțimea coborâtă din vârful opus bazei.
3. Dacă într-un triunghi o bisectoare a unui unghi este și înălțime corespunzătoare laturii opuse unghiului, atunci triunghiul este isoscel.

Teoreme referitoare la mediatoarea bazei

1. Într-un triunghi isoscel mediatoarea bazei trece prin vârful opus bazei.
2. Într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei triunghiului este inclusă în mediatoarea corespunzătoare bazei.
3. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului opus bazei este inclusă în mediatoarea corespunzătoare bazei.
4. Într-un triunghi isoscel înălțimea coborâtă din vârful opus bazei este mediatoarea bazei.

Teoremele de mai sus pot fi restrânse într-o formulare aproximativă, astfel:
În orice triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei este bisectoare, înălțime și mediatoare în triunghi.

Alte proprietăți ale triunghiului isoscel:

1. În orice triunghi isoscel medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.
2. În orice triunghi isoscel înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.
3. Triunghiul cu două mediane congruente este isoscel.
4. Triunghiul cu două înălțimi congruente este isoscel.

Proprietățile triunghiului echilateral

1. Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente, fiecare având măsura de 60°.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă un triunghi are toate unghiurile congruente atunci el este echilateral.
3. Triunghiul isoscel cu un unghi cu măsura de 60° este echilateral.
4. Într-un triunghi echilateral, mediana, înălțimea și mediatoarea fiecărei laturi, precum și bisectoarea unghiului opus laturii, coincid.

Proprietățile triunghiului dreptunghic

1. **Teorema 30°- 60°- 90°.** Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit cu măsura de 30°, atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este jumătate din lungimea ipotenuzei.
2. Dacă într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei atunci măsura unghiului opus acelei catete este de 30°.
3. **Mediana corespunzătoare ipotenuzei.** În orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.
4. Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind cel opus laturii căreia i s-a considerat mediana.

Cazurile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Catetă-catetă (C.C.)	Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.
Catetă-unghi (C.U.)	Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit, respectiv, congruente, sunt congruente.
Ipotenuză-catetă (I.C.)	Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă, respectiv congruente, sunt congruente.
Ipotenuză-unghi (I.U.)	Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit, respectiv congruente, sunt congruente.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. În triunghiul ABC, latura opusă unghiului $\measuredangle ABC$ este ... .
2. În triunghiul DEF, unghiul opus laturii $[DE]$ este ... .
3. În triunghiul XYZ, unghiurile alăturate laturii $[XZ]$ sunt ... .
4. În triunghiul MNP, latura cuprinsă între vârfurile unghiurilor $\measuredangle N$ și $\measuredangle P$ este ... .
5. Triunghiul MNP este isoscel de bază $[NP]$. Atunci unghiurile congruente sunt ... .
6. Triunghiul ABC este isoscel de bază $[AC]$. Atunci laturile congruente sunt ... .
7. Triunghiul MNP are $MP = 10$ și $NP = 10$. Unghiurile congruente vor fi ... .
8. În triunghiul ABC avem $\measuredangle A = 30^\circ$ și $\measuredangle B = 30^\circ$. Atunci laturile egale sunt ... .
9. În triunghiul XYZ avem $XY = 10, \measuredangle Y \equiv \measuredangle Z$. Atunci XZ are lungimea ... .
10. În triunghiul XYZ avem $XY > YZ > ZX$. Cel mai mare unghi al triunghiului este ... .
11. În triunghiul ABC avem $AB = AC = 5$. Cea mai mare valoare naturală pentru BC este ... .
12. Un triunghi are lungimile laturilor reprezentate prin numere naturale nenule mai mici

Scanned with OKEN Scanner

sau egale cu 2. Clasificat în funcţie de lungimile laturilor, triunghiul este sigur ... .

13. Un triunghi ABC are $m(\sphericalangle B) = 30°$, $m(\sphericalangle A) = 70°$. Cea mai lungă latură este ... .

14. Un triunghi are două laturi egale şi un unghi de 60°. Atunci triunghiul este ... .

15. Ştim că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi că $AC = 13$. Atunci PM are lungimea ... .

16. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, atunci triunghiul ΔABC este ... .

17. Ştiind că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi că $m(\sphericalangle P) = 55°$, atunci unghiul C are măsura de ... .

18. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$, atunci unghiul A are măsura de ... .

19. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA \equiv \Delta MNP$ şi $AB = 10$, atunci MP este egală cu ... .

20. Se ştie că toate lungimile laturilor unui triunghi sunt reprezentate de numere naturale nenule şi că una dintre ele are lungimea egală cu 1. Atunci triunghiul este ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Fie triunghiul MNP cu $MN = 2$, $NP = 3$, $MP = 4$. Care este cel mai mare unghi al triunghiului dat? Dar cel mai mic?

22. Un triunghi isoscel are perimetrul 25 cm şi lungimea bazei de 5 cm. Calculaţi lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului.

23. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 12 cm. Determinaţi lungimea laturilor triunghiului dat.

24. Perimetrul unui triunghi este de 27 cm. Determinaţi lungimile laturilor triunghiului, ştiind că acestea se exprimă prin trei numere impare consecutive.

25. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 22 cm. Ştiind că una din laturi are lungimea egală cu 8 cm, determinaţi lungimile celorlalte două laturi.

26. Un triunghi are perimetrul egal cu 12 cm. Determinaţi lungimile celor trei laturi ştiind că a doua este cu 2 cm mai lungă decât prima şi cu 1 cm mai scurtă decât a treia.

27. Fie triunghiul ABC, cu $AB < AC$, şi punctul $D \in [AC]$ astfel încât $AD = AB$. Se notează cu M punctul în care bisectoarea unghiului BAC taie latura $[BC]$. Arătaţi că $[MB] \equiv [MD]$.

28. Pe laturile triunghiului isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, se consideră punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$ astfel încât $[AF] \equiv [AE]$. În afara dreptei BC se iau punctele $M, N \in BC$, astfel încât $B \in (CM)$, $C \in (BN)$ şi $[MB] \equiv [CN]$. Demonstraţi că:

a) $[ME] \equiv [NF]$;

b) $\sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle AEM$;

c) $[AM] \equiv [AN]$.

29. Un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura de 45° şi lungimea unei catete de 10 cm. Determinaţi lungimea celeilalte catete.

30. Un triunghi dreptunghic isoscel are lungimea ipotenuzei egală cu 12 cm. Determinaţi lungimea înălţimii dusă din vârful drept.

31. Fie O un punct aflat în interiorul triunghiului echilateral ABC. Ştiind că $AO = BO = CO$, demonstraţi că $\Delta OAB \equiv \Delta OBC \equiv \Delta OCA$ şi determinaţi măsura unghiului BOC.

Scanned with OKEN Scanner

32. În triunghiul ABC, mediana $[AM]$ se prelungeşte cu un segment $[MN]$ astfel încât M este mijlocul lui $[AN]$. Demonstraţi că $AB = CN$ şi că $AC = BN$.

33. Se ştie că $\Delta BAD \equiv \Delta CAD$ şi că punctele B şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AD. Demonstraţi că :

a) ΔABC este isoscel ;

b) $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC.

34. Se ştie că $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ şi că punctele A şi D sunt de o parte şi de alta a dreptei BC. Arătaţi că :

a) $[AC] \equiv [BD]$;

b) $\Delta BAD \equiv \Delta CDA$.

35. Ştiind că $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC şi că punctele B şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AD, demonstraţi că:

a) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$;

b) $[DB] \equiv [DC]$.

36. Fie triunghiul ABC, cu $AB = AC$, şi $E \in (BC)$, $F \in (CE)$, astfel încât $BE = CF$. Demonstraţi că :

a) $BF = CE$;

b) $AF = AE$.

37. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctele M, N, P alese astfel încât C este mijlocul segmentului $[BM]$, A este mijlocul segmentului $[CN]$, iar B este mijlocul segmentului $[AP]$. Demonstraţi că triunghiul MNP este echilateral.

38. Într-un triunghi dreptunghic ABC avem $m(\sphericalangle A) = 90°$, $BC = 10$, $AB = 5$. Determinaţi măsura unghiului ABC şi lungimea medianei din A.

39. În triunghiul ABC avem $AB = AC$, $BD \perp AC$, $D \in (AC)$ şi $BD = \frac{AC}{2}$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

40. În exteriorul triunghiului ascuţitunghic MNP se construiesc triunghiurile echilaterale MNQ şi MPR. Demonstraţi că $PQ = RN$.

41. Fie triunghiul ABC cu proprietatea că lungimea medianei din vârful A este mai scurtă decât jumătatea lungimii laturii $[BC]$. Demonstraţi că triunghiul este obtuzunghic.

42. În figura alăturată, avem $[AB] \equiv [AC]$, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $[BM] \equiv [CN]$, $BN \cap CM = \{O\}$, $E \in BN$, $D \in CM$ şi $[EN] \equiv [DM]$.

Demonstraţi că:

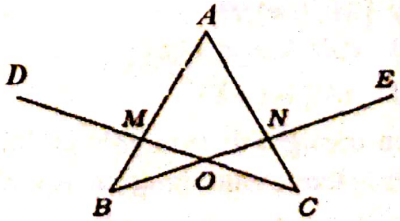
a) $[BD] \equiv [CE]$;

b) $[DA] \equiv [EA]$;

c) $[AO$ este bisectoarea unghiului DAE;

d) $[DN] \equiv [ME]$;

e) $\widehat{BME} \equiv \widehat{CND}$.



Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.2
Patrulatere

Patrulaterul este poligonul cu patru laturi.

Un patrulater se numeşte *convex* dacă oricare ar fi două puncte aflate în interiorul său, segmentul care le uneşte este inclus în interiorul patrulaterului.

Un patrulater se numeşte *concav* dacă există două puncte în interiorul său astfel încât segmentul care le uneşte nu este inclus în interiorul patrulaterului.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

1. Într-un paralelogram sunt verificate următoarele proprietăţi:
   - Laturile opuse sunt congruente.
   - Unghiurile opuse sunt congruente.
   - Oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.
   - Diagonalele se taie în segmente congruente.
2. Dacă într-un patrulater este verificată una din proprietăţile enunţate anterior, atunci patrulaterul este paralelogram.
3. Dacă într-un patrulater două laturi opuse sunt paralele şi congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.

1. Orice dreptunghi este paralelogram, deci are toate proprietăţile paralelogramului.
2. Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.
3. Unghiurile unui dreptunghi sunt congruente şi au măsura de 90°, fiecare.
4. Un paralelogram este dreptunghi dacă şi numai dacă are diagonalele congruente.

Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

1. Orice romb este paralelogram, deci rombul are toate proprietăţile paralelogramului.
2. Toate laturile unui romb sunt congruente.
3. Diagonalele unui romb sunt perpendiculare.
4. Diagonalele unui romb sunt bisectoarele unghiurilor rombului.
5. Un paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.
6. Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci paralelogramul este romb.

Pătratul este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.

Echivalent, se spune că pătratul este rombul cu un unghi drept.

1. Toate laturile unui pătrat sunt congruente.
2. Toate unghiurile unui pătrat sunt congruente, deci drepte.
3. Diagonalele unui pătrat sunt congruente, perpendiculare şi au acelaşi mijloc.
4. Diagonalele unui pătrat sunt bisectoarele unghiurilor.
5. Dacă un paralelogram are două laturi consecutive congruente şi un unghi drept, atunci este pătrat.
6. Un paralelogram are diagonalele congruente şi perpendiculare, este pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

Trapezul este patrulaterul convex care are două laturi paralele și două laturi neparalele. Laturile paralele se numesc baze.

Trapezul cu laturile neparalele congruente se numește *trapez isoscel*. Trapezul cu una dintre laturile neparalele perpendiculare pe baze se numește *trapez dreptunghic*.

Segmentul de dreaptă determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește *linie mijlocie* a trapezului.

Trapezul isoscel are următoarele proprietăți:

1. Unghiurile alăturate unei baze a unui trapez isoscel sunt congruente;
2. Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente.
3. Un trapez este isoscel dacă și numai dacă unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.
4. Un trapez este isoscel dacă și numai dacă diagonalele sunt congruente.
5. Într-un trapez linia mijlocie este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

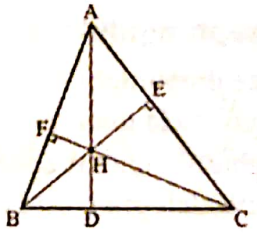
Proprietățile liniei mijlocie a trapezului

1. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu latura a treia și are ca lungime jumătate din lungimea acesteia.
2. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ a triunghiului ABC și $MN \parallel BC$ $(N \in BC)$, atunci N este mijlocul laturii $[AC]$.
3. Într-un trapez linia mijlocie este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

Ariile figurilor geometrice

Aria triunghiului. Se calculează cu una din formulele:

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$ sau $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$.



Pentru triunghiul dreptunghic putem folosi și formula:

$A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1, c_2 sunt lungimile catetelor.

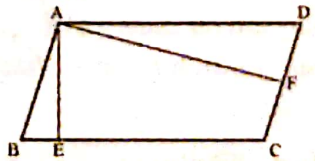
Proprietatea medianei. O mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (cu ariile egale).

Aria patrulaterului. Pentru a calcula aria unui patrulater oarecare $ABCD$ se descompune patrulaterul în triunghiuri: $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD}$.

Aria paralelogramului

Dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci:

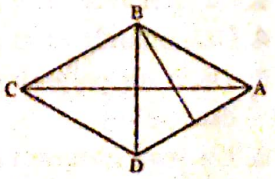
$\mathcal{A}_{ABCD} = BC \cdot AE = DC \cdot AF$ sau $\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$.



Aria dreptunghiului. Fie $ABCD$ un dreptunghi de dimensiuni $AB = L$ și $BC = l$; atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l$.

Aria pătratului. Dacă $ABCD$ este pătrat de latură $AB = l$, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = l^2$.

Aria rombului. Dacă $ABCD$ este romb, de latură $AB = l$ și înălțime h, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = l \cdot h$.



Dacă d_1 și d_2 sunt lungimile diagonalelor, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Aria trapezului. Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ sau $\mathcal{A}_{ABCD} = l_m \cdot h$, unde B şi b sunt lungimile bazelor, l_m este lungimea liniei mijlocii, iar h este lungimea înălţimii trapezului.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu ...°.
2. Într-un patrulater convex suma măsurilor a două unghiuri este 190°. Atunci suma măsurilor celorlalte două unghiuri este egală cu ...°.
3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu diagonalele de 14 cm şi 20 cm, iar M,N,P,Q mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD]$, respectiv $[AD]$.. Perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este egal cu ... cm.
4. Paralelogramul $ABCD$ are unghiul BAD de 47°. Măsura unghiului ABC este egală cu ... °.
5. În paralelogramul $ABCD$, latura AD este perpendiculară pe diagonala BD, $AD = 5$ cm şi $BD = 12$ cm. Aria paralelogramului este egală cu... cm^2.
6. Un paralelogram are măsura unghiului ascuţit o cincime din măsura unghiului obtuz. Măsura unghiului ascuţit este egală cu ...°.
7. Aria unui paralelogram $ABCD$ este 36 cm^2 şi O este punctul de intersecţie al diagonalelor. Aria triunghiului AOB este egală cu ... cm^2.
8. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$ cm şi $BC = 5$ cm, punctul M aparţine laturii CD. Aria triunghiului AMB este egală cu ... cm^2.
9. Perimetrul dreptunghiului cu aria de 100 cm^2 şi lăţimea de 5 cm este egal cu ... cm.
10. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$ mm şi $BC = 6$ mm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează segmentul $[CD]$ în punctul M. Lungimea segmentului $[DM]$ este egală cu ... mm.
11. Lungimea unui dreptunghi este cu 5 cm mai mare decât lăţimea. Perimetrul dreptunghiului este egal cu 28 cm. Lungimea dreptunghiului este de ... cm.
12. Un romb are diagonalele de lungimi 12 dm şi 24 dm. Aria rombului este egală cu ... dm^2.
13. Perimetrul rombului $ABCD$, care are $DB = 12$ cm şi măsura unghiului BAD de 60°, este egal cu ... cm.
14. Un pătrat are perimetrul de 8 cm. Lungimea laturii pătratului este egală cu ... cm.
15. Fie pătratul $ABCD$ şi punctul M mijlocul laturii $[AB]$. Dacă $AB = 6$ m, atunci aria patrulaterului $MBCD$ este egală cu ... m^2.
16. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC ale pătratului $ABCD$ care are latura de 12 cm. Aria triunghiului MND este egală cu ... cm^2.
17. Un trapez are bazele de 8 cm şi de 10 cm. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu ... cm.

Scanned with OKEN Scanner

18. Aria unui trapez cu lungimea liniei mijlocii de 10 cm și înălțimea de 7 cm este egală cu ... cm^2.

19. Un trapez isoscel are linia mijlocie de 8 cm. Dacă lungimea unei laturi neparalele reprezintă jumătate din lungimea liniei mijlocii, atunci perimetrul trapezului este egal cu ... cm.

20. Un trapez isoscel $ABCD$ are bazele $AB = 4$ cm și $CD = 8$ cm, iar măsura unghiului BCD este de 60°. Perimetrul trapezului este egal cu ... cm.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. ***a)*** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 3, 4, 8 și 9.
b) Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu 1; 0,5; 0,(3) și 0,25.

22. Patrulaterul convex $ABCD$ are perimetrul de 75 cm. Triunghiul ABC are perimetrul de 48 cm. Știind că $AC = 15$ cm, aflați perimetrul triunghiului ADC.

23. Paralelogramul $ABCD$ are perimetrul egal cu 23,6 m. Știind că $AB = 7{,}4$ m, determinați AD.

24. În paralelogramul $ABCD$ avem $m(\sphericalangle A) = 60°$, $BD \perp BC$, $AB = 8$ cm și M mijlocul laturii (AB).
a) Calculați perimetrul paralelogramului.
b) Determinați măsura unghiului MDC.

25. Fie $ABCD$ un paralelogram, la care se cunosc $AB = 12$ dm și $AE = 6$ dm, unde $AE \perp CD$, $E \in (CD)$.
a) Calculați aria paralelogramului $ABCD$;
b) Calculați aria triunghiului AOB, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

26. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 45°$, unde ducem $DM \perp AB$, $M \in (AB)$ și $BN \perp DC$, $N \in (DC)$. Dacă $DN = 6$ cm și $AB = 2\,DN$, atunci:
a) Calculați aria patrulaterului $DMBN$.
b) Calculați aria triunghiului NOC, unde $AC \cap BD = \{O\}$.

27. Un dreptunghi are perimetrul de 48 m. Se știe că lungimea este de trei ori mai mare decât lățimea.
a) Determinați dimensiunile dreptunghiului.
b) Un teren are forma și dimensiunile dreptunghiului de la a). Stabiliți dacă aria terenului este mai mare decât 2 ari.

28. Fie $ABCD$ un dreptunghi și $\{O\} = AC \cap BD$. Pe diagonala $[BD]$ se consideră punctele E și F astfel încât $[BE] \equiv [DF]$. Arătați că:
a) O este mijlocul segmentului $[EF]$.
b) $AECF$ este paralelogram.

29. Fie rombul $ABCD$ și punctul E situat pe latura $[AB]$ astfel încât unghiurile ACE și BCE să fie congruente. Măsura unghiului BEC este egală cu 15°. Calculați măsura unghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

30. Rombul $ABCD$ are $m(\sphericalangle A) = 60°$. Fie E mijlocul laturii (AB) şi F mijlocul laturii (BC). Notăm $AC \cap BD = \{O\}$.
a) Demonstraţi că $[DE] \equiv [AO]$.
b) Demonstraţi că triunghiul DEF este echilateral.

31. Un romb are diagonalele de 1,5 m şi 20 dm şi latura egală cu 25 dm.
a) Stabiliţi dacă aria rombului este mai mare decât 1,6 m^2.
b) Calculaţi câţi cm are înălţimea rombului.

32. Lăţimea unui dreptunghi este $\frac{3}{4}$ din latura unui pătrat cu perimetrul de 64 cm. Cele două patrulatere au acelaşi perimetru.
a) Aflaţi dimensiunile dreptunghiului.
b) Aflaţi aria dreptunghiului.

33. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB > BC$, cu măsura unghiului format de diagonale de 60° şi AB =12 cm. Se ştie că $BE \perp CA$, $E \in (AC)$ şi CE =3 cm.
a) Aflaţi BC.
b) Calculaţi aria dreptunghiului.

34. Se consideră pătratul $ABCD$. Pe dreapta AC se consideră punctul M astfel încât $C \in (AM)$ şi $CM = DC$. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului DBM.

35. Un pătrat şi un dreptunghi au perimetre egale. Aria pătratului este egală cu 64 cm^2, iar lungimea dreptunghiului este egală cu 10 cm.
a) Calculaţi lungimea laturii pătratului.
b) Calculaţi aria dreptunghiului.

36. Un pătrat $ABCD$ are aria de 18m^2. Se dublează latura pătratului, obţinându-se un alt pătrat, $MNPQ$.
a) Câţi metri are latura pătratului $ABCD$?
b) Aflaţi aria pătratului $MNPQ$.

37. Calculaţi aria unui trapez cu baza mică de 12 cm, baza mare de 2 dm şi înălţimea de 4 cm.

38. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, se cunosc $CD = 6$ cm, $BC = 5$ cm şi $m(\sphericalangle ADC) = 120°$. Se construieşte $CE \perp AB, E \in (AB)$.
a) Calculaţi AE.
b) Calculaţi perimetrul trapezului.

39. Trapezul isoscel $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\sphericalangle B) = 45°$. Ştiind că $CD = 12$ cm şi $AB = 2{,}25 \cdot CD$ aflaţi:
a) înălţimea trapezului.
b) aria trapezului.

40. În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, se ştie că $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 45°$, $AC \perp BC$, iar $CD = 12$ cm.
a) Arătaţi că $AB = 2CD$.
b) Calculaţi aria trapezului.

41. Un teren de formă dreptunghiulară are dimensiunile de 10 m şi 4 m. Terenul se acoperă cu dale de pavaj. Acestea au formă de dreptunghi cu dimensiunile de 50 cm, respectiv 20 cm.

Scanned with OKEN Scanner

a) Aflați aria terenului.
b) Câte dale sunt necesare pentru a acoperi terenul în totalitate?

42. Un panou publicitar este dreptunghiular, are lungimea de trei ori mai mare decât lățimea și perimetrul de 16 m.
a) Arătați că lățimea panoului este egală cu 2 m.
b) Stabiliți dacă diagonala panoului are lungimea mai mare de 6 m.
c) Se vopsește panoul. Dacă la fiecare m^2 sunt necesari 0,3 l de vopsea, stabiliți numărul minim de cutii de vopsea de 1l ce trebuie cumpărate.

43. O cameră are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, unde $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, iar $m(\sphericalangle B) = 60°$. Se știe că $AB = 8$ m și $CD = 4$ m.
a) Arătați că aria camerei este egală cu $24\sqrt{3}$ m^2.
b) Se parchetează podeaua camerei. Bucățile de parchet au formă dreptunghiulară cu lungimea de 50 cm și lățimea de 10 cm. Stabiliți numărul minim de astfel de bucăți ce trebuie cumpărate pentru parchetarea întregii podele.
c) Dacă parchetul are prețul de achiziție de 40 lei/m^2, stabiliți dacă ajung 1500 lei pentru cumpărarea parchetului necesar, știind că se acordă 10% reducere pentru toată cantitatea oricărei persoane care cumpără minim 25 m^2 de parchet.

44. Un tablou are forma unui dreptunghi de lungime 40 cm și lățime 30 cm (împreună cu rama). Rama tabloului are lățimea de 5 cm.
a) Calculați suprafața ramei.
b) Se vopsește rama. Dacă la fiecare m^2 sunt necesari 0,5 l de vopsea, stabiliți dacă o cutie de 1l este suficientă pentru a da două straturi de vopsea.

45. O alee de formă dreptunghiulară cu lungimea de 25 m și lățimea de 5 dm se pavează cu plăci în formă de trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, având baza mare de 2 dm și baza mică de 1 dm.
a) Care este suprafața aleii ?
b) Aflați înălțimea unei plăci de pavaj.
c) Care este numărul minim de plăci necesare pentru pavarea întregii alei ?

46. Un muncitor a montat 25 de geamuri. Fiecare geam are forma unui pătrat cu latura de 40 cm.
a) Care este suprafața totală a geamurilor montate?
b) Costul montării unui metru pătrat de geam este de 20 lei. Câți lei trebuie plătiți pentru montarea celor 25 geamuri ?

47. O grădină de formă dreptunghiulară are lungimea cu 24 m mai mare decât lățimea și aria egală cu 256 m^2. Grădina este împrejmuită de un gard.
a) Arătați că lățimea grădinii este de 8 m.
b) Aflați lungimea gardului care împrejmuiește grădina.
c) Arătați că nu putem planta doi pomi în grădină, astfel încât distanța dintre ei să fie mai mare de 33 m.

48. Un teren agricol are forma unui trapez isoscel $ABCD$ cu lungimea bazei mari $[CD]$ de 50 m, lungimea bazei mici $[AB]$ de 30 m și măsura unghiului C de 45^0.
a) Calculați suprafața terenului.
b) Pe porțiunea de teren corespunzătoare triunghiului ABC se cultivă castraveți. Calculați aria acestui teren.
c) Dacă producția medie de castraveți este de 50 tone/ha, calculați câte kilograme de castraveți a recoltat un fermier de pe suprafața ABC.

Scanned with OKEN Scanner

49. Mihai are la dispoziție plăci dreptunghiulare, fiecare având dimensiunile de 10 cm și 7 cm.

a) Calculați latura pătratului ce poate fi construit cu 70 de astfel de plăci.

b) Determinați numărul minim de plăci cu care Mihai poate construi un pătrat.

50. Un teren dreptunghiular cu dimensiunile de 30 m și 20 m se împrejmuiește cu un gard de sârmă, susținut de stâlpi situați la distanța de 5 m unul de altul.

a) Determinați numărul stâlpilor.

b) Care este lungimea totală a sârmei folosite, daca aceasta se pune pe două rânduri ?

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.3
Asemănare

Segmente proporționale. Patru segmente se numesc *proporționale* dacă se poate forma o proporție cu lungimile acestora.

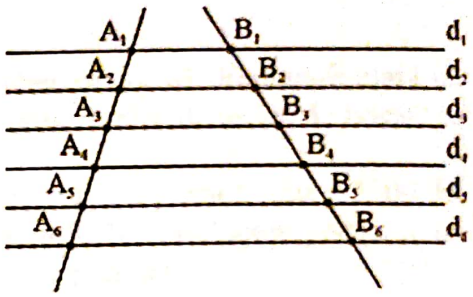
Exemplu. Fie segmentele: $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 0{,}5$ cm, $DE = 1$ cm.

Atunci $\frac{AB}{BC} = 2$, $\frac{DE}{CD} = 2$ și $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, deci segmentele date sunt proporționale.

Teorema paralelelor echidistante Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

În figura alăturată, avem:

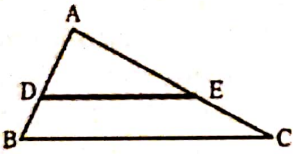
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \\ A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots \end{array}\right| \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$$

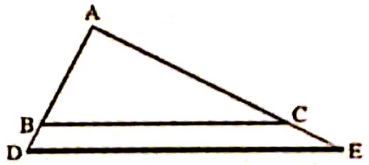


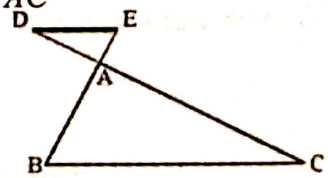
Teorema lui Thales O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau prelungirile acestora, segmente proporționale.

Pentru figurile de mai jos din $DE \parallel BC$, aplicând teorema lui Thales, rezultă

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CE} \quad \text{sau} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$







Reciproca teoremei lui Thales. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in AB$, $E \in AC$, în același semiplan determinat de paralela prin A la BC. Dacă $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, atunci $DE \parallel BC$.

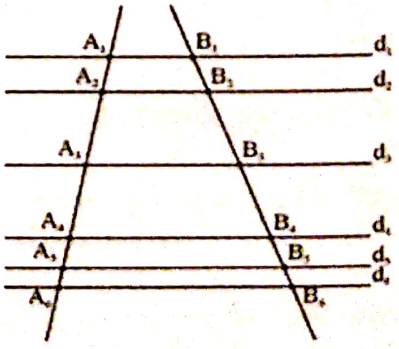
Observație În condițiile de mai sus, dacă $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$, atunci $DE \nparallel BC$.

Aplicații ale teoremei lui Thales

1. Teorema paralelelor neechidistante.

Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

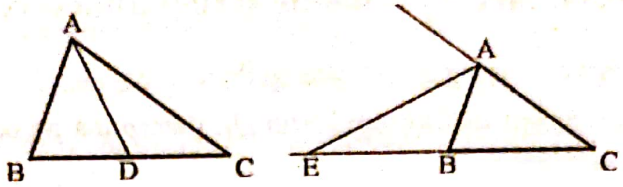
Pentru figura alăturată, dacă: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots$ și a, b sunt două secante, atunci $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \ldots$



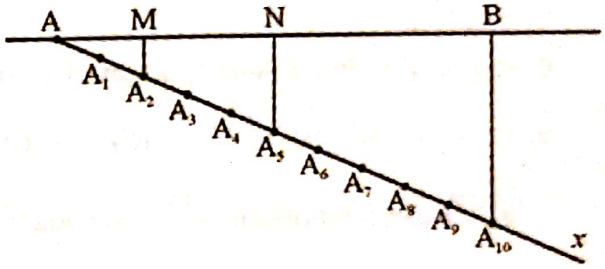
2. Teorema bisectoarei. Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi.

Scanned with OKEN Scanner

În figura din stânga avem $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, iar în dreapta $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$, unde $[AE]$ este bisectoarea unghiului exterior unghiului BAC într-un triunghi în care $AB \neq AC$.



3. Împărţirea unui segment în părţi proporţionale cu numere (segmente) date. De exemplu, pentru a împărţi un segment $[AB]$ în părţi proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5 procedăm astfel. Considerăm semidreapta $[Ax$ şi, cu ajutorul compasului construim 10 segmente congruente $(2 + 3 + 5 = 10)$. Fie $AA_2 = 2u$, $A_2A_5 = 3u$, $A_5A_{10} = 5u$. Unim A_{10} cu B şi apoi ducem $A_5N \parallel A_{10}B$ şi $A_2M \parallel A_{10}B$. Cu ajutorul teoremei paralelor neechidistante obţinem $\frac{AM}{2}=\frac{MN}{3}=\frac{NB}{5}$.

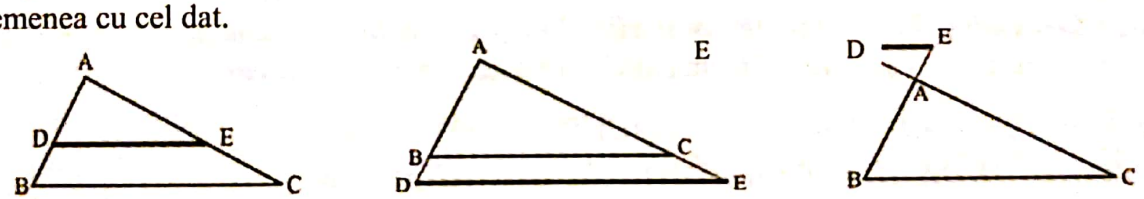


Triunghiuri asemenea. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile corespondente congruente şi laturile corespondente proporţionale.

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E,\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \text{ şi } \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k,$$

unde k se numeşte raport de asemănare.

Teorema fundamentală a asemănării. O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat.



Pentru figurile de mai sus avem: $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Criterii de asemănare

Criteriul U.U. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de unghiuri corespondente congruente.

Criteriul L.U.L. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de laturi corespondente proporţionale şi unghiurile dintre ele congruente.

Criteriul L.L.L. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile corespondente proporţionale.

Observaţia 1. Raportul înălţimilor, medianelor şi bisectoarelor ce pornesc din vârfurile corespondente a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

Observaţia 2. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Raportul a două segmente congruente este egal cu … .
2. O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente … .
3. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile corespondente … și laturile corespondente … .
4. Linia mijlocie a unui triunghi are lungimea egală cu … din lungimea laturii cu care este paralelă.
5. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu … raportului de asemănare.
6. În triunghiul ABC și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și $MN \parallel BC$.

   a) Valoarea raportului $\frac{AN}{AC}$ este egală cu … .

   b) Valoarea raportului $\frac{CN}{AN}$ este egală cu … .

   c) Dacă $AB = 15$ și $AN = 8$ cm, lungimea segmentului $[AM]$ este … cm.

   d) Dacă $AB = 15$ și $AN = 8$ cm, lungimea segmentului $[AC]$ este … cm.

7. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E, $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, astfel încât $DE \parallel AC$.

   a) Dacă $DB = 4$ cm, $AB = 10$ cm și $BC = 15$ cm, atunci $BE = \ldots$ cm.

   b) Dacă $EC = 3$ cm, $BE = 12$ cm și $AD = 6$ cm, atunci $AB = \ldots$ cm.

   c) Dacă $BE = 7$ cm, $AD = 10$ cm și $AB = 24$ cm, atunci $BC = \ldots$ cm.

   d) Dacă $AD = 6$ cm, $AB = 16$ cm și $EC = 18$ cm, atunci $BE = \ldots$ cm.

8. În triunghiul ABC, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Dacă $EF \parallel BC$ și:

   a) $AB = 18$ cm, $AC = 36$ cm, $AE = 12$ cm, atunci $AF = \ldots$ cm.

   b) $AC = 16$ cm, $AF = 6$ cm, $EB = 5$ cm, atunci $AE = \ldots$ cm.

   c) $AB = 27$ cm, $AE = 15$ cm, $FC = 16$ cm, atunci $AC = \ldots$ cm.

   d) $AB = 24$ cm, $EB = 18$ cm, $FC = 12$ cm, atunci $AF = \ldots$ cm.

9. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele D și E, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Verificați dacă $DE \parallel BC$ în cazurile următoare:

   a) $AB = 20$ cm, $BD = 11$ cm, $AC = 46$ cm și $AE = 18$ cm.

   b) $AD = 12$ cm, $BD = 16$ cm, $AE = 30$ cm și $AC = 70$ cm.

10. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm și raportul de asemănare este $k = \frac{2}{5}$, atunci lungimea segmentului $[DE]$ este egală cu … cm.
11. Dacă $\Delta CDE \sim \Delta MNP$, $DE = 6$ cm și raportul de asemănare $k = 2$, atunci lungimea segmentului $[NP]$ este egală cu … cm.
12. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 6$ cm, $MN = 4$ cm, $MP = 2$ cm și $NP = 6$ cm, atunci

Scanned with OKEN Scanner

perimetrul triunghiului ABC este egal cu ... cm.

13. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm, $PR = 10$ cm și $P_{ABC} = 48$ cm, atunci $AB =$ ... cm, $AC =$ ... cm, iar $BC =$ ... cm.

14. Fie triunghiurile asemenea ACB și DMP. Se cunoaște că $m(\sphericalangle A) = 35°$ și $m(\sphericalangle C) = 73°$. Atunci $m(\sphericalangle D) = ...°$, $m(\sphericalangle M) = ...°$ și $m(\sphericalangle P) = ...°$.

15. Dacă $\Delta ABD \sim \Delta CMN$, $m(\sphericalangle C) = 39°$ și $m(\sphericalangle D) = 48°$, atunci măsura unghiului B este de ...°.

16. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 25$ cm, $AC = 30$ cm, $MP = 18$ cm și $m(\sphericalangle A) = 75°$, atunci lungimea segmentului $[MN]$ este ... cm, iar $m(\sphericalangle M) =$ ... °.

TFA 20-26

17. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 20$ cm, $AD = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, perimetrul triunghiului EAB este ... cm.

18. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$, $AB = 15$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, perimetrul triunghiului EDC este ... cm.

19. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 7$ cm, $CD = 9$ cm și $AC = 8$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, lungimea segmentului $[AO]$ este ... cm.

20. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, avem $AB = 20$ cm, $CD = 13$ cm și $AD = 7$ cm. Se consideră punctele $E \in (AD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $EF \parallel CD$, iar $AE = 3$ cm. Lungimea segmentului $[EF]$ este egală cu ... cm.

21. În trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$, $MN = 24$ cm și $PQ = 16$ cm. Dacă $MP \cap NQ = \{O\}$ și $OR \parallel MN$, $R \in (QM)$, atunci lungimea segmentului $[OR]$ este ... cm.

22. Fie triunghiurile asemenea ABC și DEF. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $EF = 12$ cm și $DF = 15$ cm, atunci $AC =$ ... cm, iar $DE =$ ... cm.

23. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se cunosc $AB = 12$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 11$ cm, $AB > DE$, iar raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 3. Perimetrul triunghiului DEF este egal cu ... cm.

24. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. Se știe că $AB = 2DE$.
a) Raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu ... .
b) Se știe că $\mathcal{A}_{ABC} = 8$ cm^2. Aria triunghiului DEF este egală cu ... cm^2.

25. Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea și $\mathcal{A}_{ABC} = 36$ cm^2, $\mathcal{A}_{DEF} = 4$ cm^2. Valoarea raportului de asemănare al celor două triunghiuri este ... .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

26. În triunghiul ABC, punctele D, E, F, G, M și N sunt mijloacele segmentelor (AB), (AC), (AD), (AE), (DB), respectiv (EC). Se știe că $DE = 6$ cm.
a) Arătați că $FG \parallel DE \parallel MN$; *b)* Calculați BC, MN și FG.

27. În triunghiul ABC, se cunosc $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Prelungim laturile $[BA]$ și $[CA]$ cu segmentele $[AD]$, respectiv $[AE]$, unde $AD = 2$ cm și $AE = 3$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

a) Demonstrați că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$; *b)* Calculați DE.

28. Într-un trapez linia mijlocie are lungimea de 27 cm iar segmentul care unește mijloacele diagonalelor este de 8 cm. Calculați lungimile bazelor trapezului.

29. Un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ are $AB = 26$ cm și linia mijlocie $MN = 18$ cm, $M \in (AD), N \in (BC)$.

a) Calculați lungimea bazei mici a trapezului;

b) Dacă P și Q sunt două puncte, $P \in (AB)$, $Q \in (DC)$ și $PQ \cap MN = \{R\}$, arătați că R este mijlocul segmentului $[PQ]$.

30. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$ notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{M\} = AD \cap BC$. Demonstrați că $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$ și $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC}$.

31. În triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Stabiliți dacă $DE \parallel BC$ în fiecare din situațiile:

a) $AD = 6$ cm, $AE = 3$ cm, $DB = 0{,}8$ dm, $EC = 40$ mm.

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$, $AE = 6$ cm, $EC = 4$ cm;

c) $DB = 30\%\, AB$, $EC = \frac{1}{3} AC$.

32. Fie punctele M și N situate pe laturile $[AC]$, respectiv $[BC]$ ale triunghiului dreptunghic $ABC, m(\sphericalangle A) = 90°$. Dacă $m(\sphericalangle C) = 30°$, $MN \parallel AB$, $MN = 6$ cm și $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$, calculați lungimile NC, BC și AB.

33. Fie $ABCD$ un dreptunghi și punctul $M \in (AB)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$. Dacă $MN \parallel AC$, $N \in (BD)$, iar $MN \cap BC = \{P\}$, calculați $\frac{BP}{BC}$ și $\frac{BN}{BD}$.

34. Fie triunghiul ABC și (BD bisectoarea interioară a unghiului B. Aflați:

a) AD și DC știind că $AB = 15$ cm; $BC = 24$ cm și $AC = 26$ cm.

b) BC știind că $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{6}$ și $AB = 21$ cm.

35. Un trapez $ABCD, AB \parallel CD$, $AB > CD$ are $AB = 18$ cm și $CD = 6$ cm.

a) Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului;

b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$, iar $AC = 16$ cm, calculați AO și OC.

36. Se consideră segmentul $[AB]$ de lungime 48 cm și punctul $M \in (AB)$. Calculați AM și MB dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$.

37. În trapezul $ABCD, AB \parallel CD$, $AB > CD$, $[AD] \equiv [DC] \equiv [BC], m(\hat{B}) = 60^0$ și $CD = 4$ cm.

a) Calculați AB;

b) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, calculați $\frac{MD}{MA}$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Se consideră triunghiul ABC, (AD bisectoarea $\hat{A}$, $D \in (BC)$. Se ştie că $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm şi $BC = 10$ cm.

a) Aflaţi BD şi CD;

b) Dacă $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$, calculaţi perimetrul patrulaterului $ABDE$.

39. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M şi N, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $AB = 9$ cm, $AM = 3$ cm şi $NC = 4$ cm, calculaţi MB, AN şi AC.

40. În triunghiul ABC, punctele M, N şi P aparţin laturilor (AB), (AC), respectiv (BC), astfel încât $MN \parallel BC$ şi $NP \parallel AB$.

a) Arătaţi că $MNPB$ este paralelogram;

b) Arătaţi că $\frac{AM}{AB} + \frac{PC}{BC} = 1$.

41. 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe laturile (AB) şi (BC) se consideră punctele M şi N, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ şi $\frac{BN}{NC} = 3$.

a) Arătaţi că $MN \parallel AC$;

b) Dacă $MN \cap DB = \{P\}$, calculaţi $\frac{BP}{PD}$.

42. Fie triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm şi $BC = 12$ cm. Pe latura (AB) se consideră punctul D, iar pe latura (AC) se consideră punctul E, astfel încât $AD = 4$ cm şi $AE = 3$ cm.

a) Stabiliţi dacă $DE \parallel BC$.

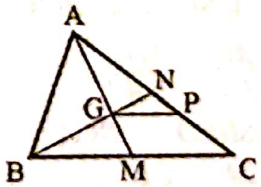
b) Calculaţi DE.

43. Fie triunghiul MNP cu $MN = 15$ cm, $MP = 20$ cm şi $NP = 13{,}5$ cm. Pe latura (MN) se consideră punctul A astfel încât $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3}$, iar pe latura (MP) se consideră punctul B astfel încât $AB \parallel NP$.

a) Demonstraţi că $ABPN$ este trapez.

b) Calculaţi $P_{\Delta MAB}$ şi P_{ABPN}.

44. În figura alăturată, $[AM]$ şi $[BN]$ sunt mediane în triunghiul ABC, iar $GP \parallel BC$. Se ştie că $BC = 12$ cm şi $AM = 9$ cm.



a) Calculaţi GP.

b) Dacă, în plus, $AC = 30$ cm, calculaţi NP.

45. În figura 2, (AA' este bisectoarea unghiului BAC, iar $A'D \parallel AC$ şi $A'E \parallel AB$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$.

Se ştie că $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm şi $BC = 15$ cm.

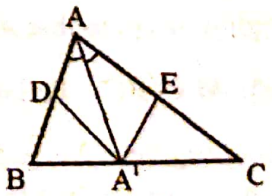


fig. 2

a) Stabiliţi natura patrulaterului $ADA'E$.

b) Calculaţi perimetrul patrulaterului $ADA'E$.

46. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 8$ cm, $AC = 20$ cm şi $BC = 16$ cm. Pe latura (AB) se

Scanned with OKEN Scanner

consideră punctul D astfel încât $AD = 5$ cm. Se construiește $DE \parallel AC$, $E \in (BC)$, și apoi $EF \parallel AB$, $F \in (AC)$. Stabiliți natura patrulaterului $ADEF$ și apoi calculați perimetrul său.

47. În figura 5, $D \in (AC)$, $DE \parallel AB$ și $DF \parallel BC$.

a) Demonstrați că $\frac{AF}{AB} = \frac{BE}{BC}$.

b) Demonstrați că $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = 1$.

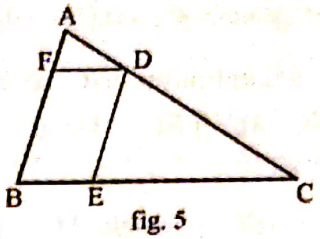


fig. 5

48. În figura 7, $ABCD$ este trapez, iar $EF \parallel AB$, $O \in (EF)$.

a) Demonstrați că $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = 1$.

b) Demonstrați că $\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 2$.

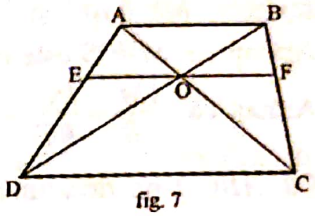


fig. 7

49. În figura 1, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, astfel încât $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$.

a) Demonstrați că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$;

b) Dacă $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 15$ cm și $DE = 9$ cm, calculați AE și AD.

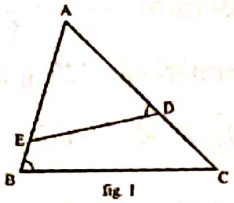


fig. 1

50. Se consideră triunghiurile isoscele ABC ($AB = AC$) și MNP ($MN = MP$). Dacă $m(\sphericalangle A) = 78°$ și $m(\sphericalangle N) = 51°$, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

51. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele D și E, astfel încât $DE \parallel BC$. Se cunosc $AD = 5$ cm, $DB = 6$ cm, $AE = x + 2$ cm și $EC = x + 4$ cm, unde $x > 0$.

a) Arătați că $\frac{DE}{BC} = \frac{5}{11}$;

b) Calculați valoarea lui x.

52. În triunghiul ABC se consideră punctul $D \in (AB)$. Se construiesc $DE \parallel AC$ și $DF \parallel BC$ ($E \in (BC)$, $F \in (AC)$). Arătați că:

a) $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB}$;

b) $\Delta BED \sim \Delta BCA$;

c) $\frac{AF}{FC} = \frac{CE}{EB}$.

53. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) se știe că $m(\sphericalangle B) = 30°$, iar $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$. Pe latura (AB) se consideră punctul N, astfel încât $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$. Fie P mijlocul segmentului $[CN]$.

a) Arătați că $BN = 2MP$;

b) Arătați că $APMN$ este romb.

Scanned with OKEN Scanner

54. Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $AD \perp BC$. Demonstraţi că:

a) $\Delta ABD \sim \Delta CBA$;

b) $\Delta ABD \sim \Delta CAD$;

c) $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

55. În triunghiul ABC, $AB = AC$, $m(\sphericalangle B) = 72°$ şi (BD este bisectoarea unghiului B, unde $D \in (AC)$. Demonstraţi că:

a) ΔBDC este isoscel;

b) $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

56. În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Se ştie că $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm şi $BC = 9$ cm.

a) Calculaţi BD şi BC;

b) Determinaţi raportul ariilor triunghiurilor ADB şi ADC.

57. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$. Latura $[AB]$ se prelungeşte cu $[AN]$, astfel încât $[AN] \equiv [AB]$, iar $MN \cap AC = \{P\}$.

a) Arătaţi că $AM \parallel NC$;

b) Arătaţi că $PC = 2AP$.

58. Triunghiurile ABC şi DEF sunt asemenea. Se cunosc $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm şi $BC = 9$ cm, $AB > DE$, iar raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 2. Calculaţi perimetrul triunghiului DEF.

59. În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Se ştie că $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm şi $BC = 15$ cm.

a) Calculaţi BD şi BC;

b) Calculaţi raportul ariilor triunghiurilor ADB şi ADC.

60. În figura 6, $ABCD$ este paralelogram. Se dau $AD = 10$ cm, $M \in (AD)$, $AM = 6$ cm. Dacă $AC \cap BM = \{P\}$ şi $BM \cap CD = \{N\}$, calculaţi: $\frac{AB}{ND}, \frac{AB}{NC}, \frac{BP}{PN}, \frac{AP}{AC}, \frac{BP}{MN}$.

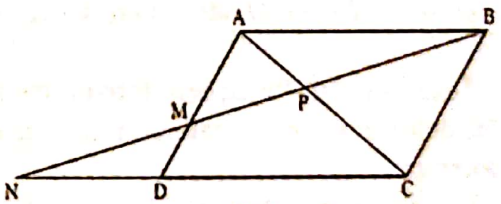
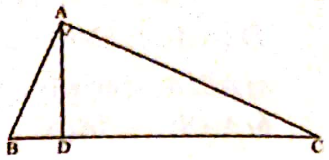


fig. 6

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.4
Relații metrice

Teorema înălțimii. Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

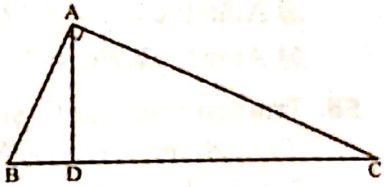


Cu notațiile din figură, avem $AD^2 = BD \cdot CD$.

Lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei: $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Reciproca teoremei înălțimii. Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = BD \cdot CD$. Atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

Teorema catetei. Într-un triunghi dreptunghic lungimea fiecărei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției catetei pe ipotenuză.

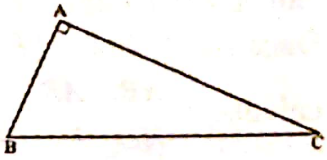


Cu notațiile din figura alăturată avem: $\begin{cases} AB^2 = BD \cdot BC \\ AC^2 = CD \cdot BC \end{cases}$.

Reciproce ale teoremei catetei

1. În triunghiul ABC, dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și are loc una din egalitățile $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.
2. În triunghiul ABC, dacă există un punct $D \in (BC)$ care are proprietatea că $AB^2 = BC \cdot BD$ și $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



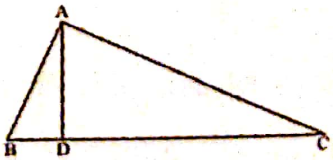
Pentru figura alăturată: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Reciproca teoremei lui Pitagora. Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

Observație. Dacă în triunghiul ABC avem $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $m(\sphericalangle A) > 90°$, iar dacă $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $m(\sphericalangle A) < 90°$.

Teorema lui Pitagora generalizată

Fie triunghiul ABC și $D = \text{pr}_{BC}A$.



Dacă $m(\sphericalangle C) < 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

Dacă $m(\sphericalangle C) > 90°$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$.

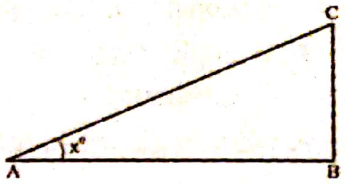
Scanned with OKEN Scanner

Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

- Pentru orice triunghi dreptunghic se definesc rapoartele sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, numite funcții trigonometrice.

Pentru figura alăturată acestea se scriu:

$\sin x^0 = \frac{BC}{AC}$, $\cos x^0 = \frac{AB}{AC}$, $\operatorname{tg} x^0 = \frac{BC}{AB}$, $\operatorname{ctg} x^0 = \frac{AB}{BC}$.



Se observă că:

$$\operatorname{tg} x^0 = \frac{\sin x^0}{\cos x^0}; \quad \operatorname{ctg} x^0 = \frac{\cos x^0}{\sin x^0}; \quad \sin^2 x^0 + \cos^2 x^0 = 1.$$

Relații între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare

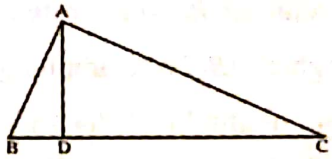
a. $\sin(90° - x°) = \cos x^0$ **b.** $\cos(90° - x^0) = \sin x^0$ **c.** $\operatorname{tg}(90° - x^0) = \operatorname{ctg} x^0$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teorema cosinusului

Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle C) < 90°$, și $D = \text{pr}_{BC}A$.



Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Din triunghiul dreptunghic ACD rezultă $CD = AC\cos C$, deci are loc relația

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C. \qquad \textbf{(1)}$$

În mod asemănător, dacă $m(\sphericalangle C) > 90°$, se demonstrează că:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot AC \cdot \cos(180° - C) \qquad \textbf{(2)}$$

Egalitățile **(1)** respectiv **(2)** sunt cunoscute drept teorema cosinusului.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile 1 dm și $\sqrt{3}$ dm. Lungimea ipotenuzei este egală cu … dm.

2. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 15 cm și ipotenuza de 17 cm. Lungimea celeilalte catete este egală cu … cm.

3. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 15 cm și 20 cm. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu … cm.

4. Dreptunghiul cu lungimea de 8 cm și lățimea de 6 cm are diagonala egală cu … cm.

Scanned with OKEN Scanner

5. Diagonala unui pătrat are lungimea de $2\sqrt{3}$ dm. Latura pătratului este egală cu ... dm.

6. Un dreptunghi $ABCD$ are $AB = 8$ cm şi $BC = 4$ cm. Distanţa de la punctul A la diagonala BD este egală cu ... cm.

7. Triunghiul ABC are $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm şi $BC = 5$ cm. Atunci măsura unghiului C este egală cu ...°.

8. Un triunghi are lungimile laturilor 3 cm, 4 cm, 5 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.

9. Un triunghi dreptunghic are lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză egale cu 2 cm şi 8 cm. Calculând aria triunghiului se obţine ... cm^2.

10. Un triunghi ABC dreptunghic în A are $AB = 16$ cm şi $BC = 20$ cm. Lungimea proiecţiei catetei AC pe ipotenuză este egală cu ... cm.

11. Aria rombului $ABCD$, care are $DB = 12$ cm şi măsura unghiului BAD de 60°, este egală cu ... cm^2.

12. Rezultatul calculului $\text{tg}60° - 2\sin 60°$ este ... .

13. Rezultatul calculului $(\cos 30° + \sin 30°)(\cos 60° - \sin 60°)$ este ... .

14. Rezultatul calculului $\dfrac{\sin 30° \cos 60°}{\text{tg}45°}$ este ... .

15. Calculând valoarea expresiei $E = \cos x + \sin(90^0 - x)$ pentru $x = 30^0$ se obţine ... .

16. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt $AB = 9$ cm şi $AC = 12$ cm. Rezultatul calculului $\sin B + \sin C$ este ... .

17. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Calculând $\sin^2 B + \cos^2 B$ se obţine ... .

18. Măsura unghiului A din triunghiul ABC este de 30^0, iar $AB = 6$ cm şi $AC = 10$ cm. Aria triunghiului ABC este egală ... cm^2.

19. Un romb are diagonalele de lungimi 6 m şi 8 m. Calculând valoarea sinusului unui unghi al rombului se obţine ... .

20. Rombul $ABCD$ are aria $24\sqrt{3}$ cm^2 şi măsura unghiului A de 60°. Lungimea diagonalei AC este egală cu ... cm.

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Fie triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$.
a) Stabiliţi proiecţiile catetelor pe ipotenuză.
b) Dacă $BC = 35$ cm, determinaţi lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză ştiind că acestea sunt invers proporţionale cu numerele 0,5 şi 0,(3).

22. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, ipotenuza $[BC]$ are lungimea de 12 cm. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC.

23. Într-un triunghi dreptunghic lungimea proiecţiei unei catete pe ipotenuză este de 3 ori mai mare decât lungimea proiecţiei celeilalte catete pe ipotenuză. Dacă ipotenuza are 16 cm, calculaţi lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei.

24. Proiecţiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile 3 cm şi 6 cm.
a) Calculaţi perimetrul triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculați aria triunghiului.

25. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), se consideră $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și $DM \perp AB$, $M \in (AB)$. Se cunosc $BC = 20$ cm și $BM = 5$ cm.

a) Calculați perimetrul triunghiului ABD.

b) Calculați aria triunghiului ABC.

26. În rombul $ABCD$ se consideră $AC \cap BD = \{O\}$ și $OM \perp AB$, $M \in (AB)$. Se cunosc $AM = 3{,}6$ cm și $MB = 6{,}4$ cm.

a) Calculați OM.

b) Calculați aria rombului $ABCD$.

27. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD = BC$. Se știe că $BD \perp BC$, $AB = 8$ cm și $DC = 16$ cm.

a) Determinați lungimea înălțimii trapezului.

b) Calculați perimetrul trapezului.

28. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se știe că înălțimea $AD = 12$ cm și $\frac{DB}{DC} = \frac{9}{16}$.

Determinați perimetrul triunghiului.

29. În triunghiul dreptunghic ABC, fie M mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Se știe că $m(\widehat{B}) = 60°$ și $AM = 6$ cm.

a) Calculați lungimea ipotenuzei $[BC]$.

b) Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

30. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar $AB = 8$ cm și $BC = 10$ cm.

a) Calculați AC.

b) Aflați lungimea bisectoarei unghiului C.

31. În triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 6$ cm, medianele AM și BN fac un unghi de 30°.

a) Arătați că $AM = 9\sqrt{3}$ cm.

b) Calculați perimetrul triunghiului.

32. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 25$ cm.

a) Stabiliți natura triunghiului ABC.

b) Calculați sinusul unghiului B.

c) Calculați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

33. În dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) se consideră $AM \perp BD$, $M \in (BD)$. Se știe că $DM = 2\sqrt{2}$ cm și $MB = 4\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

b) Calculați raportul dintre ariile triunghiurilor AMD și AMB.

34. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se știe că $\text{tg}B = \frac{3}{4}$ și $BC = 15$ cm.

a) Calculați perimetrul triunghiului ABC

b) Calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului B.

35. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $DB = 9$ cm și $\text{tg}B = \frac{2}{3}$.

a) Determinați lungimile laturilor triunghiului;

b) Calculați $\sin C + \cos C$.

Scanned with OKEN Scanner

36. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle EAC) = 90°$, se consideră înălțimea AD, $D \in (BC)$. Se cunosc $BC = 16$ cm și $CD = 4$ cm.

a) Calculați aria triunghiului ABC.

b) Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

c) Determinați lungimea bisectoarei din C a triunghiului ABC.

37. În exteriorul rombului $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ se construiesc pătratele $ABEF$ și $BCMN$.

a) Calculați aria rombului $ABCD$.

b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle EBN$.

c) Determinați aria poligonului $ADCMNEF$.

38. Laturile unui triunghi au lungimile $x, x+1$ și $x+2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, x este exprimat în m.

a) Calculați aria triunghiului dacă $x = 7$ m.

b) Determinați valoarea lui x astfel încât triunghiul să fie dreptunghic.

39. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile $x+2$ și $x+4$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, x este exprimat în cm.

a) Calculați lungimea ipotenuzei dacă $x = 4$ cm.

b) Determinați valoarea lui x astfel încât aria triunghiului să fie egală cu 7,5 cm^2.

40. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $FC = EC = \frac{1}{3}BC$.

a) Calculați aria triunghiului AEF.

b) Aflați distanța de la punctul E la latura AF.

41. O clădire are înălțimea de 20 m și o scară are lungimea de 25 m. Scara trebuie pusă pe sol pentru ca al doilea capăt al ei să ajungă la acoperiș fără a-l depăși.

a) Calculați distanța pe sol față de clădire la care a fost pusă scara.

b) Cristi urcă pe scară parcurgând la fiecare 15 secunde 2,5 m. După cât timp ajunge Cristi la capătul scării ?

42. O tablă de oțel în formă de pătrat cu latura de 120 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Calculați cantitatea de vopsea necesară, știind că pentru 45 cm^2 se consumă 3 g de vopsea.

43. Lungimea pasului lui Vlad este de 8 dm și el face 150 de pași pe minut. Vlad parcurge diagonala pieței publice din orașul său, care are forma unui pătrat, în 40 de secunde.

a) Calculați viteza lui Vlad, exprimată în metri pe secundă.

b) Determinați aria pieței.

c) Pentru pavarea pieței se folosesc dale dreptunghiulare, de dimensiuni 25 cm ×80 cm. Calculați numărul de dale necesare.

44. Un teren are forma unui triunghi isoscel ABC. Se știe că $AB = AC = 25$ m, iar $BC = 40$ m.

a) Arătați că suprafața terenului este egală cu 3 ari.

b) Se împarte terenul în două parcele, astfel: se aleg două puncte $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$, astfel încât $DE \parallel BC$ și $DE = 10$ m. Calculați aria parcelei ADE.

c) Calculați perimetrul gardului ce va înconjura parcela $DECB$.

45. Un teren are formă de pătrat cu diagonala de 30 m.

a) Aflați suprafața terenului.

Scanned with OKEN Scanner

b) Se înconjoară terenul cu gard de sârmă. Știind că 1 m liniar de gard costă 40 lei, iar pe o latură a terenului se găsește o poartă lată de 1 m, care costă 200 lei, stabiliți dacă pentru împrejmuire sunt suficienți 300 lei. ($\sqrt{2} \simeq 1,41$).

46. O cameră de formă dreptunghiulară are dimensiunile exprimate în metri prin numere naturale proporționale cu 2 și 3 și având media geometrică $2\sqrt{6}$.

a) Aflați dimensiunile camerei.

b) Un covor ocupă 40% din suprafața camerei. Calculați suprafața rămasă neacoperită.

c) Un cablu TV este instalat prin podea, pe diagonala camerei. Stabiliți dacă 7 m de cablu sunt suficienți.

47. O scară având lungimea de 100 dm este sprijinită de un perete. Distanța pe sol dintre piciorul scării și perete este de 60 dm. Mihai se urcă pe scară, până la o un sfert din lungimea ei.

a) La ce înălțime față de sol se află capătul de sus al scării?

b) La ce distanță față de sol se află Mihai?

c) Câți metri trebuie să mai urce Mihai pe scară, pentru a ajunge la o distanță față de sol de 5 m?

48. O piesă de puzzle are forma unui pătrat $ABCD$ cu latura de 12 cm. Piesa este colorată jumătate cu roșu (corespunzător triunghiului ABD) . Pe latura $[AB]$ se consideră punctul M, astfel încât $AB = 4MB$. Suprafața corespunzătoare triunghiului DBM este colorată cu albastru, iar restul piesei este alb.

a) Calculați lungimea segmentului $[DM]$.

b) Calculați aria suprafeței colorate cu roșu.

c) Aflați cât la sută din aria suprafeței colorate cu roșu reprezintă aria suprafeței colorate cu albastru.

49. O placă de gresie are forma unui romb cu latura de 16 cm și aria de $64\sqrt{3}$ cm^2.

a) Arătați că diagonala mică a plăcii este egală cu 16 cm.

b) Stabiliți dacă 150 bucăți de gresie de această formă ar fi suficiente pentru a acoperi podeaua unei băi dreptunghiulare cu dimensiunile de 1,5 m și 2,5 m.($\sqrt{3} \simeq 1,73$)

50. O cameră are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$, având bazele $[AB]$ și $[CD]$ de lungimi 10 m, respectiv 14 m și $m(\sphericalangle C) = 60°$.

a) Calculați suprafața camerei.

b) Stabiliți numărul minim de metri pătrați de parchet ce trebuie cumpărat pentru parchetarea întregii suprafețe a camerei. (se poate cumpăra doar număr întreg de metri pătrați de parchet)

c) Cât costă parchetul necesar dacă prețul este de 50 lei/m^2, dar se acordă o reducere de 15% pentru toată cantitatea cumpărată, oricărei persoane ce achiziționează minim 40 m^2 ?

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.5
Cercul

Elemente în cerc. Coardă, arc, unghi la centru

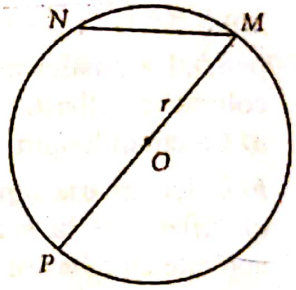
Fiind dat un punct în plan O şi un număr real pozitiv r, se numeşte *cerc* de centru O şi rază r mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O.

Altfel zis, cercul este mulțimea punctelor egal depărtate de un punct fix (centrul).

Notăm cercul de centru O şi rază r astfel: $\mathcal{C}(O,r)=\{M\in\mathcal{P}\mid OM=r\}$.

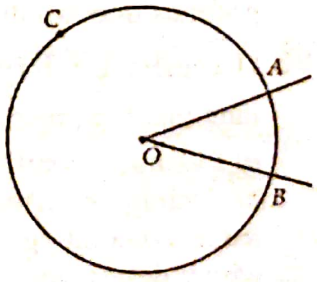
În anumite situații, prin *rază* vom înțelege şi segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care uneşte două puncte de pe cerc se numeşte *coardă*. O coardă care conține centrul cercului se numeşte *diametru*. Lungimea oricărui diametru este $2r$. Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc *puncte diametral opuse*.

Două cercuri sunt congruente dacă au razele egale. Scriem $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)\equiv\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$ dacă şi numai dacă $r_1=r_2$.



În figura alăturată, segmentul $[MN]$ este coardă, iar $[MP]$ este diametru. Segmentele $[OM]$, $[ON]$ şi $[OP]$ sunt raze. Avem $OM=ON=OP=r$ şi $MP=2r$.

Arc de cerc. Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numeşte *arc de cerc*, iar punctele care determină arcul se numesc capetele (extremitățile) arcului. Dacă extremitățile unui arc de cerc sunt puncte diametral opuse, arcul se numeşte *semicerc*.



Două puncte $A,B\in\mathcal{C}(O,r)$, nediametral opuse, determină pe un cerc două arce: *arcul mic* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc aflată în interiorul unghiului AOB) şi *arcul mare* $\overset{\frown}{AB}$ (porțiunea de cerc din exteriorul unghiului AOB). În general, când scriem $\overset{\frown}{AB}$ (folosind doar două litere), ne referim la arcul mic. Pentru notația unui arc mare vom folosi încă un punct al arcului, diferit de capetele lui: de exemplu, vom nota $\overset{\frown}{ACB}$ arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ din figură.

Unghi la centru. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numeşte unghi la centru. În figura de mai sus, $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru.

Măsura unui arc mic de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător: $m(\overset{\frown}{AB})=m(\sphericalangle AOB)$. Măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este $m(\overset{\frown}{ACB})=360°-\ -m(\overset{\frown}{AOB})$. Măsura unui diametru este 180°, iar măsura unui cerc este de 360°.

Două arce sunt congruente dacă şi numai dacă au aceeaşi măsură. Notăm $\overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{CD}$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1 (referitoare la arce şi coarde congruente în cerc)
Într-un cerc sau în cercuri congruente, coardelor congruente le corespund arce congruente, şi reciproc.

Altfel spus, două coarde pe un cerc sunt congruente dacă şi numai dacă arcele corespunzătoare lor sunt congruente: $[AB] \equiv [CD]$ *dacă şi numai dacă* $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Teorema 2 (referitoare la diametrul perpendicular pe o coardă)
Într-un cerc, un diametru perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei şi determină, pe fiecare dintre arcele subîntinse de coardă, arce congruente.

Cu alte cuvinte, dacă $[MN]$ este diametru în cercul $\mathcal{C}(O,r)$, iar $A, B \in \mathcal{C}(O,r)$ astfel încât $MN \perp AB$ şi $MN \cap AB = \{E\}$, atunci $[AE] \equiv [BE]$, $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{BM}$ şi $\overset{\frown}{AN} \equiv \overset{\frown}{BN}$.

Teorema 3 (referitoare la arce cuprinse între coarde paralele)
Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente: dacă $AB \parallel CD$, *atunci* $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$.

Teorema 4 (referitoare la coarde egal depărtate de centru)
Într-un cerc, două coarde sunt congruente dacă şi numai dacă sunt egal depărtate de centru: $[AB] \equiv [CD]$ *dacă şi numai dacă* $d(O, AB) = d(O, CD)$.

Observaţie. Teorema 4 este valabilă şi pentru coarde situate în cercuri congruente $\mathcal{C}(O,r) \equiv \mathcal{C}'(O',r)$: $[AB] \equiv [CD]$ dacă şi numai dacă $d(O, AB) = d(O', CD)$.

Unghi, triunghi şi patrulater înscris în cerc

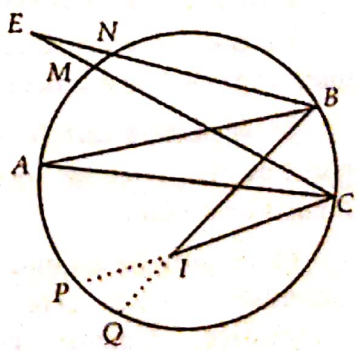
Un unghi cu vârful pe cerc şi ale cărui laturi includ două coarde ale cercului se numeşte *unghi înscris în cerc.*

Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenţei măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.

Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este semisuma arcelor cuprinse între laturile unghiului şi prelungirile laturilor lui.

În figura alăturată, $A, B, C \in \mathcal{C}(O,r)$, $E \in \operatorname{Ext}\mathcal{C}(O,r)$ şi $I \in \operatorname{Int}\mathcal{C}(O,r)$. Unghiul $\sphericalangle BAC$ este înscris în cerc, $\sphericalangle BEC$ este unghi cu vârful în exteriorul cercului, iar $\sphericalangle BIC$ este unghi cu vârful în interiorul cercului. Măsurile lor sunt:



$$m(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{BC});$$

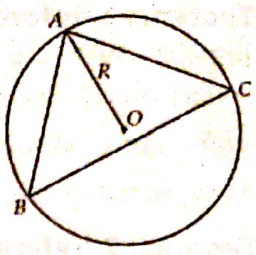
$$m(\sphericalangle BEC) = \frac{1}{2} \cdot \left[m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{MN}) \right];$$

$$m(\sphericalangle BIC) = \frac{1}{2} \cdot \left[m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{PQ}) \right].$$

Observaţii:
1. Orice unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept.
2. Două unghiuri înscrise în cerc care subîntind acelaşi arc sunt congruente.

Scanned with OKEN Scanner

Triunghi înscris în cerc. Spunem că un *triunghi* este *înscris într-un cerc* dacă vârfurile sale aparţin cercului. În acest caz, spunem că cercul este *circumscris* triunghiului.



În figura alăturată, triunghiul ABC este *înscris* în cercul $C(O,R)$ şi cercul este *circumscris* triunghiului. Dacă S este aria triunghiului şi $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, avem relaţia $abc=4RS$.

Centrul cercului circumscris unui triunghi se află la intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului.

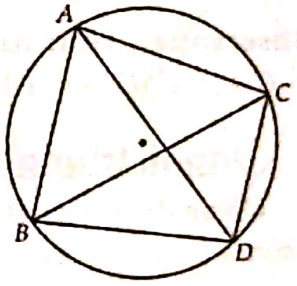
Un patrulater cu vârfurile pe un cerc se numeşte *patrulater înscris în cerc*, iar despre cerc vom spun că este *circumscris* patrulaterului. Orice patrulater înscris într-un cerc este patrulater convex.

Patru puncte se numesc *conciclice* dacă se află pe un acelaşi cerc.

Un patrulater se numeşte *inscriptibil* dacă vârfurile sale sunt conciclice. Altfel spus, un patrulater este inscriptibil dacă poate fi înscris într-un cerc.

Teorema 5 (referitoare la unghiurile opuse ale unui patrulater înscris)
Unghiurile opuse ale unui patrulater înscris într-un cerc sunt suplementare.

Teorema 6 (referitoare la unghiuri formate de diagonale cu laturi opuse)
Într-un patrulater înscris în cerc, unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.



În figura alăturată, $ABCD$ este un patrulater înscris în cerc. Au loc relaţiile:

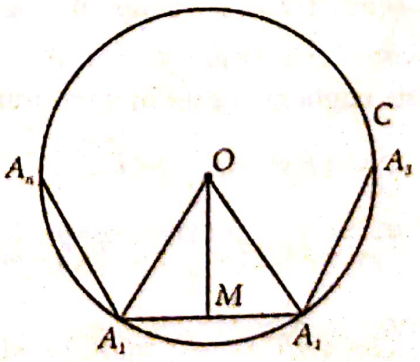
$$m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle C)=180^\circ \text{ şi } m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle D)=180^\circ;$$

$$\overset{\frown}{BAC}\equiv\overset{\frown}{BDC},\ \overset{\frown}{DAC}\equiv\overset{\frown}{BDC},\ \overset{\frown}{ABD}\equiv\overset{\frown}{ACD},\ \overset{\frown}{DBC}\equiv\overset{\frown}{DAC}.$$

Observaţie. Au loc şi reciprocele teoremelor 5 şi 6, în sensul că:
RT5. Un patrulater cu două unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.
RT6. Un patrulater în care unghiul format de o latură cu o diagonală este congruent cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală este inscriptibil.

Poligoane regulate

Un poligon convex cu toate laturile congruente şi cu toate unghiurile congruente se numeşte *poligon regulat*.



Împărţind un cerc în $n\geq 3$ arce congruente şi unind punctele de diviziune consecutive, se obţine un poligon regulat cu n laturi.

Orice poligon regulat este înscris într-un cerc şi este circumscris unui cerc, aceste două cercuri fiind concentrice. Centrul comun se numeşte *centrul poligonului*.

Distanţa de la centrul poligonului regulat la fiecare dintre laturi se numeşte *apotemă*. Raza cercului înscris în poligonul regulat este egală cu apotema poligonului.

Pentru un poligon regulat cu n laturi, folosim notaţiile: u_n – măsura unui unghi, l_n – lungimea laturii, a_n – lungimea apotemei, P_n – perimetrul şi A_n – aria.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru un poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $\mathcal{C}(O,R)$ avem:

$u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$	$l_n = 2R\sin\dfrac{180^0}{n}$	$a_n = R\cos\dfrac{180^0}{n}$
$P_n = n\cdot l_n = 2nR\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$A_n = \dfrac{p_n\cdot a_n}{2} = nR^2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	

Elementele poligoanelor regulate cu 3, 4 şi 6 laturi

Triunghiul echilateral: $l_3 = R\sqrt{3}$; $a_3 = \dfrac{R}{2}$; $P_3 = 3l_3 = 3R\sqrt{3}$; $A_3 = \dfrac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

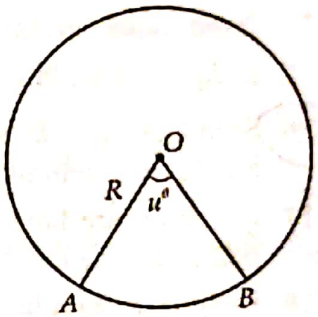
Pătratul: $l_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $P_4 = 4l_4 = 4R\sqrt{2}$; $A_4 = l_4^2 = 2R^2$.

Hexagonul regulat: $l_6 = R$; $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $P_6 = 6l_6 = 6R$; $A_6 = \dfrac{3l_6^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Lungimi şi arii în cerc

Lungimea cercului şi aria discului de rază r se calculează cu formulele:

$$L_{cerc} = 2\pi r, \quad A_{disc} = \pi r^2.$$



Sectorul circular este porţiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale. Lungimea unui arc de cerc de măsură u° şi aria sectorului circular corespunzător se calculează cu formulele:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi r\cdot u^0}{180^0}, \qquad A_{sector} = \frac{\pi r^2\cdot u^0}{360^0}.$$

Segmentul circular este porţiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc şi coarda care subîntinde acel arc. Aria segmentului circular corespunzător unui arc de măsură u° este: $\mathcal{A}_{segment} = \left(\dfrac{\pi\cdot u^\circ}{360^\circ} - \dfrac{\sin u^\circ}{2}\right)r^2$.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Punctele A şi B se află pe un cerc de centru O şi rază 6 cm. Ştiind că $AB = 6$ cm, măsura unghiului AOB este … .
2. Punctele A şi B sunt pe un cerc de centru O şi rază $10\sqrt{2}$ cm. Ştiind că $AB = 20$ cm, măsura unghiului AOB este … .
3. Dacă M şi N sunt două puncte pe un cerc de centru O, rază 10 cm şi $MN = 10$ cm, atunci aria triunghiului OMN este … .
4. Punctele A, B, C sunt pe un cerc de rază 5 cm. Ştiind că $AB = BC = 5$ cm, măsura unghiului BAC este … .
5. Centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare se află la intersecţia … .
6. Centrul cercului înscris într-un triunghi oarecare se află la intersecţia … .

Scanned with OKEN Scanner

7. Dacă centrul de greutate al unui triunghi coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului, atunci triunghiul este … .

8. Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6 cm are lungimea de … .

9. Raza cercului înscris într-un triunghi echilateral cu latura de lungime 12 cm are lungimea de … .

10. Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor egale cu 8 cm respectiv cu 6 cm. Atunci raza cercului circumscris triunghiului are lungimea de … .

11. Un pătrat are lungimea razei cercului circumscris egală cu 10 cm. Lungimea laturii pătratului este … .

12. Un hexagon regulat are lungimea unei diagonale mari egală cu 30 cm. Aria cercului circumscris hexagonului este egală cu … .

13. Un romb are latura de lungime 6 cm şi un unghi cu măsura de 60°. Lungimea razei cercului înscris în romb este … .

14. Punctul A se află în afara cercului de centru O şi rază de lungime 8 cm. Ştiind că $AO = 10$ cm, lungimea tangentei din A la cerc este … .

15. Avem două cercuri de centre O_1 şi respectiv O_2. Ştiind că $O_2O_1 = 15$ cm, $R_1 = 10$ cm şi $R_2 = 5$ cm, lungimea tangentei comune la cele două cercuri este egală cu … .

16. Ştiind că A şi B sunt două puncte pe un cerc de rază 8 cm şi că $BA = 8$, lungimea arcului mic delimitat de punctele B şi A este … .

17. Un pătrat are latura de lungime 6 cm. Porţiunea aflată între pătrat şi cercul înscris în pătrat are aria egală cu … .

18. Lungimea cercului circumscris unui triunghi echilateral, cu latura de lungime 10 cm, este egală cu … .

19. Un triunghi echilateral are lungimea razei cercului înscris egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Lungimea laturii triunghiului este egală cu … .

20. Lungimea razei cercului înscris într-un hexagon regulat este $\sqrt{3}$ cm. Aria discului reprezentat de cercul circumscris hexagonului este egală cu … .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Punctele A şi B se află pe un cerc de centru O şi rază 25 cm. Ştiind că $AB = 30$ cm, determinaţi distanţa de la O la AB.

22. Punctele A, B, C se află pe un cerc de centru O şi rază 20 cm. Ştiind că triunghiul ABC este echilateral, determinaţi măsura unghiului ABO.

23. Punctele A, B, C şi D se află pe un cerc de centru O şi rază 10 cm. Ştiind că $ABCD$ este un pătrat, determinaţi:
a) Lungimea laturii pătratului;
b) Lungimea razei cercului înscris în pătrat.

24. Un hexagon regulat are lungimea laturii egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Determinaţi:
a) Lungimea diametrului cercului circumscris hexagonului dat.
b) Lungimea diagonalei scurte a hexagonului.

25. Determinaţi raza cercului înscris într-un romb de latură 10 cm şi cu măsura unghiului ascuţit egală cu 60°.

Scanned with OKEN Scanner

26. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6 cm respectiv 8 cm. Determinați:.
a) Raza cercului circumscris triunghiului dat;
b) Lungimea cercului înscris triunghiului.

27. Un dreptunghi are lungimea de 12 cm, lățimea de 9 cm și centrul în O.
a) Determinați raza cercului circumscris dreptunghiului.
b) Calculați raza cercului înscris în triunghiul determinat de O și extremitățile uneia din lungimile dreptunghiului.

28. Laturile unui trapez isoscel sunt tangente la un cerc (trapez circumscriptibil). Știind că lungimile bazelor sunt de 48 cm respectiv de 12 cm, determinați:
a) Raza cercului înscris în trapez;
b) Aria și perimetrul trapezului.

29. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC și raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 13$ cm.

30. Se dau două cercuri tangente exterior de raze 10 cm respectiv x cm. Determinați x, știind că lungimea tangentei exterioare este egală cu $4\sqrt{5}$ cm.

31. Două cercuri secante au lungimile razelor de 11 cm, respectiv de 6 cm. Determinați lungimea coardei comune știind că lungimea tangentei comune este de 12 cm.

32. Determinați lungimea razei cercului circumscris unui trapez isoscel $ABCD$, de baze AB și CD, cu $AB = 12$ cm și $BC = CD = DA = 6$ cm.

33. Se dă un cerc de centru O și un punct A astfel încât $AO = 25$ cm și lungimea tangentelor din A la cercul dat este egală cu 20 cm. Determinați lungimea razei cercului și distanța între cele două puncte de tangență .

34. Un trapez isoscel are lungimile bazelor egale cu 16 cm respectiv cu 4 cm iar laturile neparalele au lungimea egală cu 10 cm.
a) Arătați că trapezul poate fi circumscris unui cerc.
b) Calculați raza cercului înscris în trapezul dat.

35. O piesă metalică cu secțiunea pătrat (prismă patrulateră regulată) trebuie strunjită astfel încât să obținem secțiune circulară (cilindru).Știind că lungimea diagonalei pătratului este de $10\sqrt{2}$ cm, determinați cel mai mare diametru al piesei finale.

36. Dintr-un cilindru plin trebuie să formăm o piesă cu secțiunea pătrat. Știind că diametrul cilindrului este de 10 cm , determinați cea mai mare lungime posibilă pentru latura pătratului.

37. Pe o monedă cu diametrul de $10\sqrt{3}$ mm, trebuie gravat un triunghi echilateral cât mai mare posibil iar apoi, în interiorul triunghiului echilateral se gravează cel mai mare cerc posibil. Determinați lungimea laturii triunghiului și diametrul cercului gravat.

38. Dintr-un copac (considerat cilindru) trebuie obținută o grindă de susținere a unui acoperiș. Ce diametru trebuie să aibă copacul pentru ca grinda să aibă secțiunea un pătrat cu latura de 15 cm?

39. Două roți zimțate sunt legate prin intermediul unei curele de transmisie. Știind că diametrele celor două roți sunt de 6 cm respectiv de 36 cm și distanța dintre centrele celor două roți este de 50 de cm, determinați lungimea părții din curea care nu se sprijină pe cele două roți.

40. În cercul de centru O și rază 10 cm, diametrul $[AD]$ este perpendicular pe coarda $[BC]$. Distanța de la A la dreapta BC este de 2 cm. Aflați perimetrul și aria patrulaterului de vârfuri A, B, C, D.

Scanned with OKEN Scanner

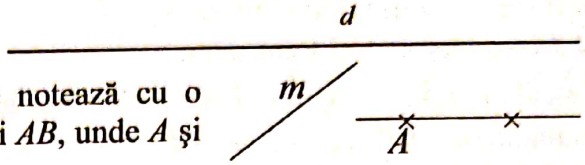
Tema 2.6

Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu

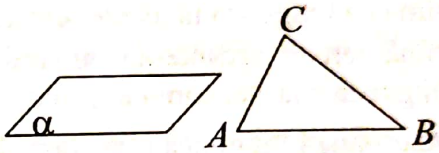
Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: *punctul, dreapta, planul.* Acestea nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul este cea mai simplă figură geometrică. El se marchează cu • sau × și se notează : • A sau • B sau × C.

Dreapta este formată din puncte. Dreapta este *nemărginită* (infinită) . Se notează cu o literă mică d sau m,sau cu două litere mari AB, unde A și B sunt două puncte ale acestei drepte.



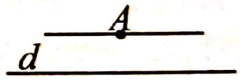
Planul. Planul este nelimitat în toate direcțiile. În geometrie vom reprezenta porțiuni de plane prin câte un paralelogram sau triunghi.
Se notează cu o literă grecească α, β, γ, π etc., sau prin trei litere mari puse în paranteză rotundă (ABC) unde A, B și C sunt trei puncte necoliniare ale acelui plan.



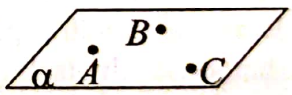
Propoziții despre elementele fundamentale ale geometriei în spațiu

1. Prin două puncte distincte A și B trece o dreaptă și numai una.
Notăm $d = AB$.

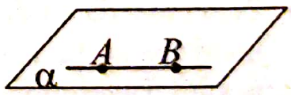
2. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce o paralelă și numai una la dreapta dată.



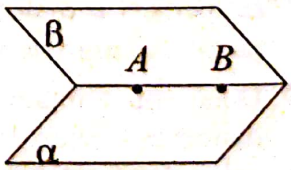
3. Există un plan și numai unul care conține trei puncte necoliniare A, B și C.
Notăm $\alpha = (ABC)$.



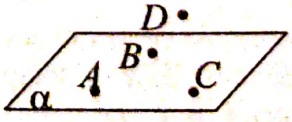
4. Dacă două puncte distincte A și B ale unei drepte aparțin unui plan α , atunci dreapta are toate punctele conținute în acel plan.
Notăm $AB \subset \alpha$.



5. Dacă două plane distincte α și β au un punct comun A, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun B (adică planele au comun dreapta AB).
Notăm $AB \subset \alpha \cap \beta$.



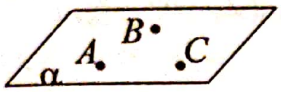
6. Există patru puncte nesituate în același plan.
Punctele A, B, C și D sunt *necoplanare*.



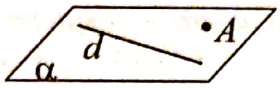
Scanned with OKEN Scanner

Determinarea planului. Un plan este *unic determinat* de:

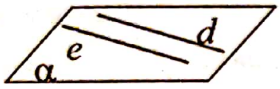
A. trei puncte necoliniare
Notăm $\alpha = (ABC)$.



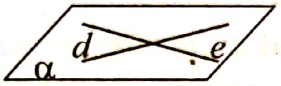
B. o dreaptă şi un punct exterior;
Notăm $\alpha = (d; A)$



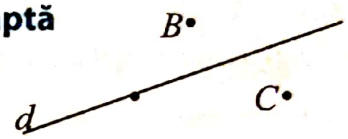
C. două drepte paralele;
Notăm $\alpha = (d; e)$.



D. două drepte concurente;
Notăm $\alpha = (d; e)$.

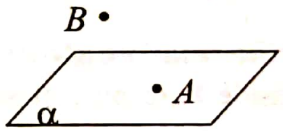


Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă



a. Punctul ***aparţine*** dreptei.
Exemplu. $A \in d$.
b. Punctul ***nu aparţine*** dreptei (este *exterior* dreptei).
Exemple. $B \notin d$, $C \notin d$.

Poziţiile relative ale unui punct faţă de un plan

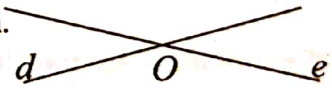


a. Punctul ***aparţine*** planului (este *situat* în plan).
Exemplu. $A \in \alpha$.
b. Punctul ***nu aparţine*** planului (este *exterior* planului).
Exemplu. $B \notin \alpha$.

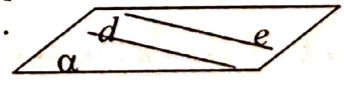
Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

a. Două drepte sunt ***identice*** (*confundate* sau *coincid*) dacă au două puncte comune.
Exemplu: Dacă $d \subset e$ şi $e \subset d$, atunci $d = e$.

b. Două drepte sunt ***concurente*** dacă au un punct comun.
Exemplu: $d \cap e = \{O\}$.



c. Două drepte sunt ***paralele*** dacă sunt coplanare şi nu au puncte comune.
Exemplu: $d \subset \alpha$, $e \subset \alpha$ şi $d \cap e = \varnothing$, atunci $d \parallel e$.



d. Două drepte sunt ***necoplanare*** dacă nu sunt concurente şi nu sunt paralele.
Exemplu: $d \cap e = \varnothing$ şi d, e

Observaţii.
1. Fie dreptele a, b şi c. Dacă $a \parallel b$ şi $b \parallel c$, atunci $a = c$ sau $a \parallel c$ (*proprietatea de tranzitivitate* a relaţiei de paralelism).
2. Două drepte sunt ***coplanare*** dacă şi numai dacă sunt paralele sau concurente.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul a două drepte în spațiu

Unghiul a două drepte situate în același plan. Se consideră două drepte a și b *concurente* în punctul O. Cele două drepte determină două perechi de unghiuri opuse la vârf cu măsurile egale cu $v°$, respectiv $180°-v°$.

Definim *măsura unghiului dreptelor* a și b ca fiind $m(\widehat{a,b}) = \min(v°, 180°-v°)$.

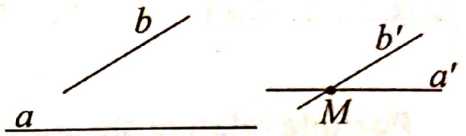
Observații.

1. Dacă $a = b$ sau $a \parallel b$, atunci $m(\widehat{a;b}) = 0°$;

2. Dacă a, b, c și d sunt drepte astfel încât $a \cap b \neq \emptyset$, $c \cap d \neq \emptyset$, $a \parallel c$ și $b \parallel d$, atunci $m(\widehat{a;b}) = m(\widehat{c;d})$ (consecință a *teoremei unghiurilor cu laturile respectiv paralele*).

Unghiul a două drepte necoplanare.

Fie două *drepte necoplanare* a și d și punctul M în spațiu. Dreptele a' și b' sunt astfel încât $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ și $a' \cap b' = \{M\}$.



Definim *măsura unghiului dreptelor* a și b ca fiind:

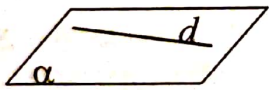
$$m(\widehat{a;b}) \overset{def}{=} m(\widehat{a';b'})$$

Definiție. Dacă a și b sunt două drepte astfel încât $m(\widehat{a;b}) = 90°$, atunci dreptele se numesc *perpendiculare*. Notăm $a \perp b$.

Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

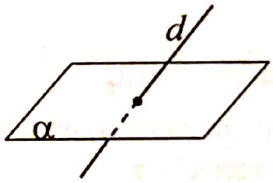
Se consideră dreapta d și planul α. Poziția dreptei d relativ la planul α poate fi:

inclusă în planul α:



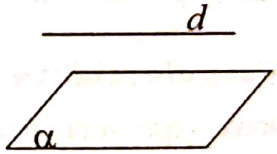
Notăm: $d \subset \alpha$

secantă planului α:



Notăm: $d \cap \alpha = \{A\}$

paralelă cu planul α:



Notăm: $d \cap \alpha = \emptyset$ sau $d \parallel \alpha$

Condiție suficientă de paralelism a unei drepte cu un plan. Fie o dreaptă d și un plan α, $d \not\subset \alpha$. Dacă există o dreaptă e, $e \subset \alpha$, astfel încât $d \parallel e$, atunci $d \parallel \alpha$.

Teorema 1. Dacă $d \parallel \alpha$, $d \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = e$, atunci $e \parallel d$ (vezi **Figura 1.**)

Teorema 2. Dacă $d \parallel \alpha$, $M \in \alpha$, $M \in e$, $e \parallel d$, atunci $e \subset \alpha$ (vezi **Figura 2.**)

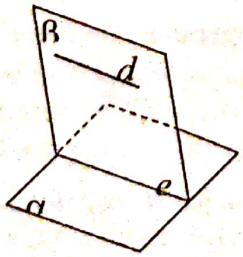


Figura 1.

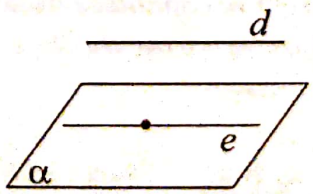


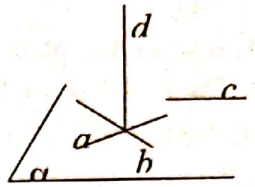
Figura 2.

Scanned with OKEN Scanner

Dreaptă perpendiculară pe un plan. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe toate dreptele incluse într-un plan α, atunci dreapta d se numește *dreaptă perpendiculară* pe planul α. Notăm $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$.

Condiție suficientă de perpendicularitate a unei drepte pe un plan

Dreapta d este perpendiculară pe planul α dacă d este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul α. Cu alte cuvinte:



Dacă $\begin{cases} a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b \neq \varnothing \\ d \perp a, d \perp b \end{cases}$, atunci $d \perp \alpha$.

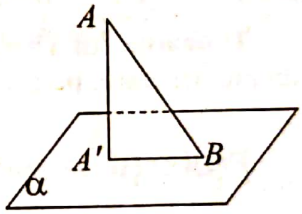
Consecință. Fie a și b două drepte concurente și o dreapta d, $d \perp (a;b)$. Dacă dreapta c este inclusă în planul $(a; b)$, atunci $d \perp c$.

Teoremă. Dacă d este o dreaptă și A este un punct în spațiu, atunci există un unic plan α care conține punctul A și este perpendicular pe dreapta d.

Teoremă. Dacă α este un plan și A este un punct în spațiu, atunci există o unică dreaptă d care conține punctul A și este perpendiculară pe planul α.

Definiție. Dreptele care conțin punctul A, diferite de perpendiculara prin A pe planul α, se numesc ***oblice*** în raport cu α.

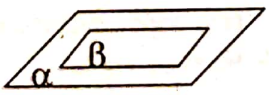
Distanța de la un punct la un plan. Fie α este un plan, A un punct în spațiu și A' piciorul perpendicularei din A planul α. Lungimea segmentului AA' se numește *distanța* de la punctul A la planul α. Notăm $d(A;\alpha) = AA'$.



Observație. Dacă punctul A exterior planului α, dreapta AA', $A' \in \alpha$, este perpendiculara pe planul α, iar dreapta AB $B \in \alpha$, este o oblică oarecare, atunci $AB > AA'$.

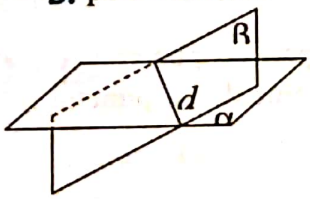
Pozițiile relative a două și trei plane. Plane paralele.

A. plane care *coincid*



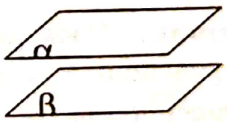
notăm $\alpha = \beta$

B. plane *secante*



notăm $\alpha \cap \beta = d$

C. plane *paralele*



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

notăm $\alpha \parallel \beta$

Observație. Dacă $\alpha \subset \beta$ și $\beta \subset \alpha$, atunci $\alpha = \beta$.

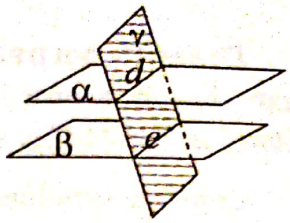
Lemă. Fie planele α și β și dreptele a și b, $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$. Dacă $a \parallel b$ și $\alpha \cap \beta = d$, atunci $a \parallel d \parallel b$.

Condiție suficientă de paralelism a două plane

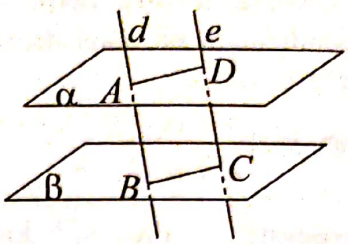
Două plane sunt paralele dacă unul dintre ele conține două drepte concurente paralele cu cel de-al doilea plan.

Scanned with OKEN Scanner

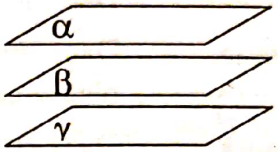
Teoreme de paralelism



Teoremă. Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\alpha \cap \gamma = d$, atunci există dreapta e astfel încât $\beta \cap \gamma = e$, iar $d \parallel e$.



Teoremă. Fie planele paralele α, β şi dreptele paralele d şi e. Dacă $d \cap \alpha = \{A\}$, atunci există punctele B, C şi D astfel încât $\{B\} = d \cap \beta$, $\{D\} = e \cap \alpha$ şi $\{C\} = e \cap \beta$. În plus, $[AB] \equiv [DC]$.
(Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.)



Teoremă (tranzitivitatea relaţiei de paralelism)
Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\beta \parallel \gamma$, atunci $\gamma \parallel \alpha$
(două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele).

Teoremă. Fie α şi β două plane paralele şi punctele $A \in \alpha$, $B \in \beta$.
Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $AB \perp \beta$.

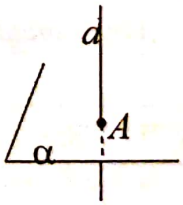
În condiţiile teoremei de mai sus, lungimea segmentului AB se numeşte *distanţa dintre planele* α şi β. Notăm $AB = d(\alpha;\beta)$.

Teorema lui Thales în spaţiu. Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, pe care le intersectează, segmente proporţionale.

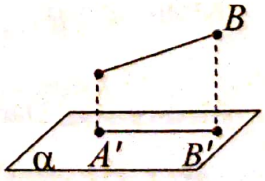
Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan

Proiecţia unui punct. Dacă punctul B este exterior planului α, atunci proiecţia punctului B pe planul α este piciorul perpendicularei duse din punctul B pe planul α.

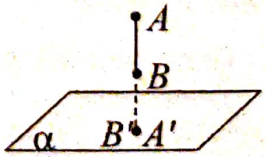
Dacă $\begin{cases} B \notin \alpha \\ BB' \perp \alpha, \text{ atunci notăm } B' = \text{pr}_\alpha B. \\ B' \in \alpha \end{cases}$



Observaţie. Dacă punctul A aparţine planului α, atunci proiecţia punctului A pe planul α coincide cu punctul A: dacă $A \in \alpha$, atunci $A = \text{pr}_\alpha A$.



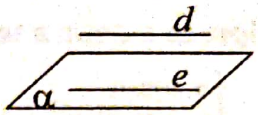
Proiecţia unui segment: Proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α este segmentul $[A'B']$ ale cărui extremităţi sunt proiecţiile pe planul α ale extremităţilor segmentului dat.
Notăm: $\text{pr}_\alpha[AB] = [\text{pr}_\alpha A \ \text{pr}_\alpha B] = [A'B']$.



Observaţie: Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul α, atunci proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α se reduce la un punct.

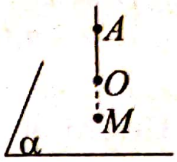
Scanned with OKEN Scanner

Proiecția unei drepte. Proiecția unei drepte d pe planul α este dreapta determinată de proiecțiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d. Notăm: $e = \text{pr}_\alpha d$



Observație. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α atunci proiecția dreptei d pe planul α este un punct.

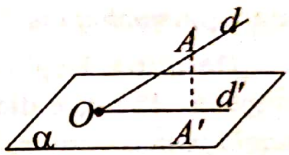
Dacă $AO \perp \alpha$ și $AO \cap \alpha = \{M\}$, atunci $\{M\} = \text{pr}_\alpha AO$.



Definiție. În general, proiecția figurii geometrice plane F pe planul α este figura geometrică F' formată din reuniunea proiecțiilor punctelor figurii F pe planul α.

Unghiul unei drepte cu un plan. Unghiul dreptei d cu planul α este unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe α.

Dacă $d' = \text{pr}_\alpha d$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = m(\widehat{d;d'})$.



Observații. 1. Dacă $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 0°$.

2. Dacă $d \perp \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 90°$.

Lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă. Se consideră un segment $[AB]$ și o dreaptă d. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_d[AB]$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;d})$.

Observație. Dacă $AB \parallel d$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp d$, atunci $A'B' = 0$.

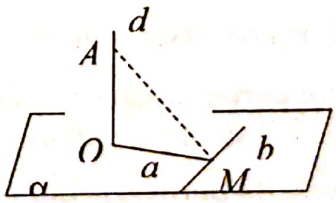
Lungimea proiecției unui segment pe un plan. Se consideră un segment $[AB]$ și un plan α. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_\alpha[AB]$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;\alpha})$.

Observație. Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp \alpha$, atunci $A'B' = 0$.

Teorema celor trei perpendiculare (T 3 ⊥)

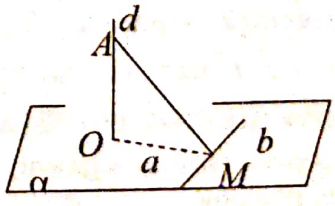
Teorema celor trei perpendiculare

Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}, A \in \alpha \\ b \subset \alpha \\ OM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $AM \perp b$.



Reciproca întâi a teoremei celor trei perpendiculare (R_1.T.3 ⊥)

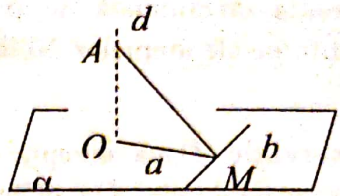
Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ A \in \alpha, b \subset \alpha, \\ AM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $OM \perp b$.



Scanned with OKEN Scanner

Reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare (R_2.T.3 $\perp$)

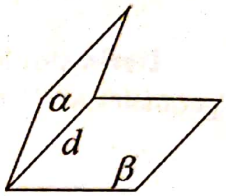
Dacă $\begin{cases} a,b \subset \alpha \\ a \perp b, a \cap b = \{M\} \\ AM \perp b, A \notin \alpha \\ AO \perp a, O \in a \end{cases}$, atunci $AO \perp \alpha$.



Unghi diedru. Plane perpendiculare

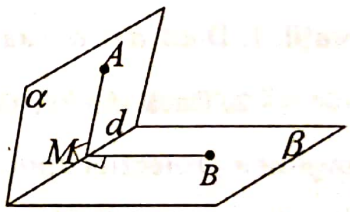
Unghiul diedru este configuraţia formată din două semiplane conţinute în plane diferite, care sunt delimitate de aceeaşi dreaptă.

În figura alăturată, dreapta d determină în planele α şi β două semiplane s_1 şi s_2. Ele formează unghiul diedru notat $(\widehat{s_1;s_2})$. Semiplanele s_1 şi s_2 se numesc *feţele diedrului*, iar dreapta d se numeşte *muchia diedrului*.



Definiţie: Unghiul format de două perpendiculare pe muchia unui diedru, conţinute respectiv în feţele diedrului şi concurente într-un punct al muchiei diedrului se numeşte *unghi plan corespunzător diedrului*.

Dacă $\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ M \in d \\ A \in \alpha, AM \perp d \\ B \in \beta, BM \perp d \end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{MA;MB})$.



Definiţie: Cea mai mică măsură a unghiurilor diedre determinate de planele α şi β se numeşte *măsura unghiului celor două plane* şi se notează $m(\widehat{\alpha,\beta})$.

Consecinţă. Dacă $\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha,\ a \perp d \\ b \subset \beta,\ b \perp d \end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{a;b})$.

Teoremă. Fie α şi β două plane secante şi $d = \alpha \cap \beta$. Dacă planul γ este perpendicular pe dreapta d, iar $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{a;b})$.

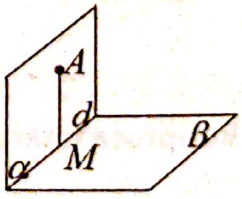
Observaţie: Dacă planele α şi β coincid sau sunt paralele, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = 0°$.

Plane perpendiculare. Dacă măsura unghiul planelor α şi β este de $90°$, atunci planele α şi β se numesc ***plane perpendiculare***. Notăm $\alpha \perp \beta$ sau $\beta \perp \alpha$.

Criteriu de perpendicularitate a două plane

Teoremă: Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conţine o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

Dacă $d \perp \beta$ şi $d \subset \alpha$, atunci $\alpha \perp \beta$.



Consecinţă: Dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = d$, $M \in d$ şi $A \in \alpha \setminus d$, atunci $AM \perp d$ dacă şi numai dacă $AM \perp \alpha$.

Observaţie: Dacă un poligon convex P de arie S se proiectează pe un plan după un alt poligon convex (sau un segment) a cărui arie S', atunci $S' = S\cos u$, unde u este măsura unghiului planelor.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Numărul maxim al dreptelor diferite determinate de câte două din 4 puncte distincte este egal cu ... .

2. Un cub vopsit în galben a fost tăiat în 27 cubulețe identice. Numărul cuburilor vopsite doar pe o față este egal cu ... .

3. Fie 5 puncte distincte astfel încât exact 4 dintre ele sunt coplanare.
a) Numărul minim de drepte distincte determinate de câte două din aceste puncte este egal cu ... .
b) Numărul maxim de drepte distincte determinate de câte două din aceste puncte este egal cu ... .

4. Fie 6 puncte distincte două câte două.
a) Numărul minim de plane care pot fi determinate de câte 3 din cele 6 puncte este egal cu ... .
b) Numărul maxim de plane care pot fi determinate de câte 3 din cele 6 puncte este egal cu ... .

5. Valoarea de adevăr a propoziției „există patru puncte coliniare necoplanare" este ... .

6. Fie tetraedrul $ABCD$. Precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a) $A \in (BCD)$; *b)* $BD \subset (ABD)$;
c) $AB \subset (ABC)$; *d)* A, B, C necoplanare.

7. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $A'D' \subset (BCD')$; *b)* $(ABC) \equiv (ACC')$; *c)* $C \in (A'B'C')$.

8. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, în care $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 2$ cm, $AC = 4$ cm. Notăm cu P mijlocul segmentului $[AC]$. Dacă $MP \perp (ABC)$ și $MP = 2$ cm, determinați:
a) $d(M;AB)$; *b)* $d(M;BC)$; *c)* $d\big(C;(MBP)\big)$; *d)* $d\big(A;(MBP)\big)$.

9. Se dă triunghiul echilateral ABC, de latură $AB = 6$ cm și punctul Q mijlocul segmentului $[AC]$. Dacă $RQ \perp (ABC)$ și $RQ = 3$ cm, calculați:
a) $d(R;BC)$; *b)* $d(R;AB)$; *c)* $d\big(Q;(RBC)\big)$; *d)* $d\big(A;(RQB)\big)$.

10. Fie $ABCD$ un pătrat cu $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $MA \perp (ABC)$ și $MA = AB = 4$ cm, determinați:
a) $d(M,BC)$; *b)* $d(M,BD)$; *c)* $d(C,MD)$; *d)* $d(D,BM)$; *e)* $d(A,(MBD))$.

11. Fie triunghiul echilateral ABC și $PA \perp (ABC)$, $AP = AB = 6$ cm.
a) Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu ... cm.
b) Distanța de la punctul C la planul (PAB) este egală cu ... cm.

12. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC se construiește perpendiculara SA. Se știe că $SA = AB = AC = 2$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.
a) Distanța de la punctul S la dreapta BC este egală cu ... cm.
b) Distanța de la punctul B la planul (SAC) este egală cu ... cm.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 6$ cm şi $BC = 8$ cm. Dacă $MA \perp (ABC)$ şi $MA = 1$ cm, atunci:
a) distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu ... cm.
b) distanţa de la punctul M la dreapta BC este egală cu ... cm.
c) distanţa de la punctul C la planul (MAB) este egală cu ... cm.
d) distanţa de la punctul A la planul (MDC) este egală cu ... cm.

14. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm.
a) Distanţa de la punctul A' la dreapta BD este egală cu ... cm.
b) Distanţa dintre planele (BCC') şi (ADD') este egală cu ... cm.
c) Distanţa de la punctul A' la dreapta CC' este egală cu ... cm.
d) Distanţa dintre planele $(A'BC')$ şi $(D'AC)$ este egală cu ... cm.

15. Pe planul unui pătrat $ABCD$ cu $AB = 2$ cm şi $AC \cap BD = \{O\}$ se ridică perpendiculara $PO = \sqrt{2}$ cm. Atunci:
a) distanţa de la punctul P la dreapta AB este egală cu ... cm.
b) distanţa de la punctul B la dreapta PA este egală cu ... cm.
c) distanţa de la punctul C la planul (PAD) este egală cu ... cm.
d) distanţa de la punctul B la dreapta PD este egală cu ... cm.

16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm şi $AA' = 4$ cm. Punctele M, P, Q sunt mijloacele muchiilor BC, CC', şi $B'C'$.
a) Valoarea de adevăr a propoziţiei „$PQ \parallel (ADD')$" este ... .
b) Valoarea de adevăr a propoziţiei „$d\left(P,(MA'B')\right) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm" este ... .
c) Aria triunghiului APQ este egală cu ... cm^2.
d) Valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele MA' şi PQ este egal cu ... .
e) Valoarea de adevăr a propoziţiei „$MA' \cap (APQ) \neq \varnothing$" este ... .

17. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Precizaţi valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii:
a) $(ABB') \parallel (CDD')$; *b)* $(ACA') \subset (BCC') = CD$; *c)* $(AD'C) \parallel (BA'C')$;
d) $(ABC) \cap (CC'D') = CD$; *e)* $(ABC) \cap (A'B'C') = \varnothing$.

18. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinaţi:
a) Proiecţia punctului A pe planul (BCC') este ... .
b) proiecţia punctului D pe planul (ABB') este ... .
c) Proiecţia segmentului $[DD']$ pe planul (BCC') este ... .
d) Proiecţia dreptei AB pe planul (CDD') este ... .
e) Proiecţia segmentului $[AC']$ pe planul (ABC) este ... .
f) Proiecţia segmentului $[AC']$ pe planul (BCC') este ... .

19. Valoarea de adevăr a propoziţiei „Două plane pot avea în comun 7 puncte distincte" este ... .

20. Fie triunghiul echilateral ABC şi $MA \perp (ABC)$, $MA = BC = 6$ cm. Dacă P este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci:
a) Unghiul format de dreapta BP cu planul (MAP) are măsura de ... °.
b) Aria triunghiului MPC este egală cu ... cm^2.
c) Distanţa de la punctul C la planul (MAB) este egală cu ... cm.
d) Distanţa de la punctul A la planul (MBC) este egală cu ... cm.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Într-un tetraedru $VABC$ avem $VA = VB = VC = 9$ cm și $AB = BC = CA = 6\sqrt{6}$ cm. Punctele M, S, P sunt mijloacele segmentelor VB, BC și respectiv VC.

a) Calculați lungimea segmentului $[VS]$. *b)* Demonstrați că $MS \parallel (VAC)$.

c) Determinați $m(\sphericalangle AB; MP)$. *d)* Determinați $m(\sphericalangle VS; AC)$.

22. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, $M \in (BB')$ și $AB' \cap A'B = \{O\}$.

a) Aflați distanța BM, astfel încât $OM + MC'$ să fie minimă.

b) Știind că $BM = 2,(6)$ cm, determinați valoarea cosinusului unghiului BOM.

23. Fie tetraedrul $ABCD$ cu toate muchiile congruente.

a) Știind că $AB = 6$ cm, determinați poziția punctului $P \in (AC)$ astfel încât suma $BP + PD$ să fie minimă.

b) Dacă M este mijlocul muchiei $[AB]$ și N este mijlocul muchiei $[CD]$, arătați că $2MN < AD + BC$.

24. Prin vârfurile paralelogramului $ABCD$ construim dreptele $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Fie punctele $A' \in a$, $B' \in b$, $C' \in c$, $D' \in d$, de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât $AA' = 4$ cm, $CC' = 3$ cm și $DD' = 2$ cm. Determinați lungimea segmentului $[BB']$, astfel încât $A'B'C'D'$ să fie paralelogram.

25. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu O, P și Q centrele pătratelor $ABCD$, $ADD'A'$ și respectiv $CDD'C'$.

a) Arătați că dreptele OD', CP și AQ sunt concurente într-un punct notat S.

b) Dacă $PS = \sqrt{5}$ cm, calculați lungimea laturii $[AB]$.

26. Triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, are latura $[BC]$ inclusă în planul α, iar $A \notin \alpha$. Se știe că $BC = 10$ cm și $AC = 8$ cm. Fie punctele $T \in (AB)$ și $Q \in (AC)$ astfel încât $AT = 2$ cm și $CQ = 2AQ$.

a) Determinați măsura unghiului format de dreptele TQ și BC.

b) Calculați perimetrul și aria trapezului $TQCB$.

27. Fie tetraedrul $VABC$ cu toate muchiile congruente. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ determinați valoarea cosinusului unghiului format de dreptele VM și AC.

28. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și $\{O\} = BC' \cap CB'$.

a) Aflați valoarea cosinusului unghiului determinat de dreptele AO și CD'.

b) Arătați că dreptele AC' și OD' sunt perpendiculare.

29. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem $m(\widehat{BC', CD'}) = m(\widehat{A'B, AC}) = 60°$. Demonstrați că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

30. Fie $ABCD$ un pătrat și $MA \perp (ABC)$. Demonstrați că:

a) $BC \parallel (MAD)$; *b)* $BD \perp (MAC)$; *c)* $d(C, (MAB)) = CB$.

31. Dacă punctele G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale fețelor ABD și BCD ale tetraedrului $ABCD$, demonstrați că $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

32. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ fie O și O' centrele fețelor $ABCD$ și $BCC'B'$. Demonstrați că:

a) $OO' \parallel (AA'B')$; *b)* $OD' \parallel (A'BC')$; *c)* $OO' \perp (CA'D')$.

Scanned with OKEN Scanner

33. În tetraedrul $ABCD$ toate cele șase muchii sunt congruente. Înălțimea tetraedrului este DO, punctul M este proiecția punctului O pe muchia DB și $MC = 2\sqrt{7}$ cm.
a) Arătați că $AB = 6$ cm.
b) Calculați valoarea cosinusului unghiului determinat de dreptele MC și AD.

34. În tetraedrul $ABCD$, fie M și N picioarele perpendicularelor duse din A pe bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACD. Demonstrați că $MN \parallel (BCD)$.

35. Paralelogramele $ABCD$ și $ABFE$ sunt în plane diferite. Dacă M este mijlocul segmentului AE, arătați că $EC \parallel (MBD)$

36. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm și M, N, P mijloacele muchiilor BC, AA' respectiv $C'D'$.
a) Determinați aria triunghiului MNP.
b) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătați că patrulaterul $OMD'P$ este paralelogram.
c) Fie $\{S\} = MN \cap (A'B'C')$. Determinați lungimea segmentului $[C'S]$.

37. De aceeași parte a planului paralelogramului $ABCD$ construim perpendicularele EA, FB, GC și HD pe planul (ABC), astfel încât $AE = 5$ cm, $BF = 6$ cm, $CG = 7$ cm și $DH = 8$ cm. Fie M și N sunt mijloacele segmentelor $[EG]$ și $[FH]$.
a) Arătați că $M \neq N$; *b)* Demonstrați că $MN \perp (ABC)$.

38. În tetraedrul $ABCD$, fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC respectiv DAB.
a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.
b) Aflați raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și ABC.

39. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D, cu $AB = AC$, și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $AE = CF$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD).

40. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ Un plan α paralel cu planul (BCC') intersectează muchiile $[AB]$, $[CD]$, $[C'D']$ și $[A'B']$ în punctele E, F, G și H. Determinați valoarea raportului $\frac{AE}{AB}$, știind că $\frac{DH}{CH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

41. Fie punctele necoplanare A, B, C și D și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se consideră punctul $M \in (AG)$ și se notează $\{P\} = AG \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ și $\{R\} = AD \cap (BCM)$.
a) Arătați că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$.
b) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$.

42. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm, fie M, P, Q mijloacele muchiilor $[BC]$, $[D'C']$, $[AD]$ și $\{O\} = A'C' \cap B'D'$.
a) Arătați că planele (DPM) și (OBQ) sunt paralele.
b) Determinați valoarea sinusului unghiului dintre dreptele BQ și $D'C'$.
c) Determinați distanța dintre planele (DPM) și (OBQ).

43. Într-un tetraedru $ABCD$ cu toate muchiile egale cu 6 cm, fie $DO \perp (ABC)$,

Scanned with OKEN Scanner

$O \in (ABC)$. Se notează cu M mijlocul segmentului $[AD]$. Determinați valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele OM și CD.

44. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$, lungimea înălțimii AA' de 4 cm, punctul G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $AG = 2\sqrt{7}$ cm.

a) Arătați că $AB = 6$ cm.

b) Fie punctul P mijlocul segmentului $[B'C']$. Demonstrați că dreapta AC' este paralelă cu planul $(A'BP)$.

45. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$, iar $AB = BB'$. Fie G centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $\{O\} = BC' \cap CB'$. Aflați valoarea tangentei unghiului dintre dreptele BB' și OG.

46. Proiecția triunghiului ABC pe planul α este triunghiul $A'BC$ cu $m(\sphericalangle BA'C) = 90°$. Dacă $AB = 15$ cm, $A'B = 9\sqrt{2}$ cm și $BC = 41$ cm, calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului $BA'C$;

b) perimetrul și aria triunghiului ABC.

47. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, fie $\{O\} = BC' \cap CB'$ și $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.

a) Determinați lungimea proiecției segmentului $[OO']$ pe planul (ABC).

b) Determinați măsura unghiului format de dreapta OO' cu planul (ABC).

c) Determinați lungimea proiecției segmentului $[OO']$ pe planul (BCD').

48. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm, și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm. Determinați:

a) $d(D', B'C)$;

b) $d(D', AB)$;

c) $d(D', AB')$;

d) $d\big(D', (AB'C)\big)$.

49. Fie rombul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și $AB = 4$ cm. Dacă $SA \perp (ABC)$, $SA = 4$ cm, atunci:

a) determinați distanța de la punctul S la dreapta BD;

b) determinați distanța de la punctul S la dreapta CD;

c) determinați măsura unghiului format de dreapta SC cu planul (ABC);

d) determinați distanța de la punctul A la planul (SDC).

50. De aceeași parte a planului rombului $ABCD$ se ridică perpendicularele MA și TC. Dacă $AB = 6$ cm, $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și $MA = TC = 3\sqrt{3}$ cm, determinați:

a) măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC).

b) măsura unghiului dintre planele (MBD) și (TBD).

c) valoarea tangentei unghiului dintre planele (MBC) și (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.7

Corpuri geometrice. Arii şi volume

Prisma dreaptă este prisma cu muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor.

Înălţimea h a unei prisme drepte este egală cu lungimea muchiei laterale.

Aria laterală A_l a unei prisme este egală cu suma ariilor feţelor laterale.

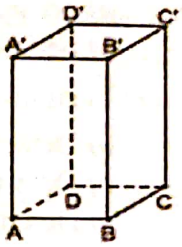
Aria totală A_t a unei prisme este egală cu suma dintre aria laterală şi ariile celor două baze.

Volumul unei prisme este egal cu produsul dintre aria bazei şi înălţime.

Notând cu P_b perimetrul bazei prismei şi cu A_b aria bazei prismei, avem:

$A_l = P_b \cdot h$	$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$	$V = A_b \cdot h$

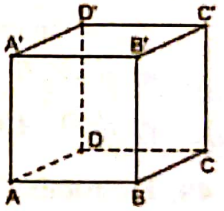
Paralelipipedul dreptunghic (cuboidul) este o prismă dreaptă cu baza dreptunghi. Fiind dat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, *lungimea diagonalei* paralelipipedului dreptunghic (d) este egală cu:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

În plus, $A_t = 2 \cdot (ab + bc + ca)$, iar $V = a \cdot b \cdot c$.

Cubul este un paralelipipedul dreptunghic cu toate dimensiunile egale ($a = b = c = l$). În cazul unui cub, avem:



$d = l\sqrt{3}$, $A_l = 4l^2$, $A_t = 6l^2$ şi $V = l^3$.

Prisma regulată este prisma dreaptă cu baza un poligon regulat.

Prisma triunghiulară regulată este prisma dreaptă cu baza un triunghi echilateral (**Figura 1**).

Prisma patrulateră regulată este prisma dreaptă cu baza un pătrat (**Figura 2**).

Prisma hexagonală regulată este prisma dreaptă cu baza un hexagon regulat (**Figura 3**).

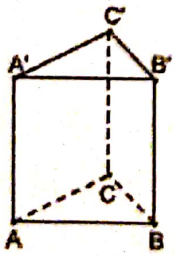


Figura 1

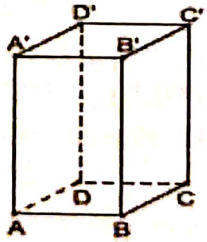


Figura 2

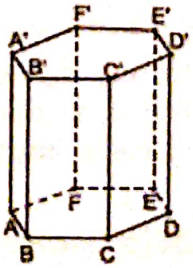


Figura 3

În cele ce urmează, notăm cu l, h, P_b, A_b, A_l, A_t şi V respectiv, lungimea laturii poligonului regulat de bază, înălţimea prismei, perimetrul bazei, aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul prismei regulate.

Scanned with OKEN Scanner

Prisma regulată	Perimetrul bazei	Aria bazei	Aria laterală	Volumul
triunghiulară	$P_b = 3l$	$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$A_l = P_b \cdot h = 3lh$	$V = A_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3} \cdot h}{4}$
patrulateră	$P_b = 4l$	$A_b = l^2$	$A_l = P_b \cdot h = 4lh$	$V = A_b \cdot h = l^2 \cdot h$
hexagonală	$P_b = 6l$	$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$	$A_l = P_b \cdot h = 6lh$	$V = A_b \cdot h = \frac{3l^2\sqrt{3} \cdot h}{2}$

Piramida regulată are baza poligon regulat, iar proiecţia ortogonală a vârfului V pe planul bazei este centrul O al poligonului de bază.

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Segmentul determinat de vârful piramidei şi mijlocul M al unei muchii a bazei se numeşte *apotema piramidei*. Orice apotemă a piramidei este perpendiculară pe muchia respectivă a bazei.

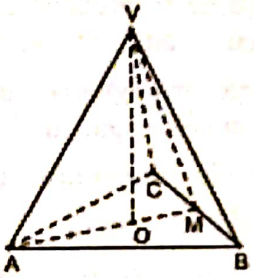


Figura 1. Piramida triunghiulară regulată

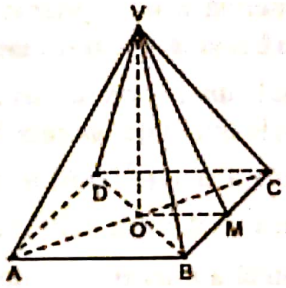


Figura 2. Piramida patrulateră regulată

Notaţii:

$AB = l$ – lungimea muchiei bazei piramidei; $OM = a_b$ – apotema bazei piramidei;

$VO = h$ – lungimea înălţimii piramidei; $VM = a_p$ – apotema piramidei.

P_b – perimetrul bazei; A_b – aria bazei;

A_l = aria laterală; A_t = aria totală; V = volumul piramidei.

	$a_p^2 = a_b^2 + h^2$ sau $a_p = \sqrt{a_b^2 + h^2}$	
$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$	$A_t = A_b + A_l = \frac{P_b(a_b + a_p)}{2}$	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Tetraedrul regulat este piramida care are toate feţele triunghiuri echilaterale.

Toate muchiile tetraedrului regulat sunt egale.

Dacă l este lungimea muchiei unui tetraedru regulat, atunci:

$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ $h = \frac{l\sqrt{3}}{6}$ $A_l = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$ $A_t = l^2\sqrt{3}$ $V = \frac{l^2\sqrt{2}}{12}$

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 cm, 3 cm şi 6 cm este egală cu ... cm^2.
2. Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de $3\sqrt{3}$ cm, înălţimea de 8 cm şi diagonala de 10 cm este egal cu ... cm^3.
3. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de $4\sqrt{3}$ cm, diagonala bazei de 8 cm şi $V = 32\sqrt{3}$ cm^3 este egală cu ... cm^2.
4. Volumul unui cub cu muchia de 6 cm este egal cu ... cm^3.
5. Aria totală a unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.
6. Aria laterală a unui cub cu suma muchiilor de 36 cm este egală cu ... cm^2.
7. Aria laterală a unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu muchia bazei de 4 cm şi înălţimea de 10 cm este egală cu ... cm^2.
8. Volumul unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu diagonala unei feţe laterale de 13 cm şi înălţimea de 12 cm este egal cu ... cm^3.
9. Aria totală a unei prisme triunghiulare drepte cu bazele triunghiuri echilaterale cu înălţimea de 9 cm şi înălţimea bazei de $4\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.
10. Aria totală a unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu latura bazei de 4 cm şi înălţimea de 7 cm este egal cu ... cm^2.
11. Aria laterală a unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu diagonala unei feţe laterale de $5\sqrt{5}$ cm şi diagonala prismei de 15 cm este egală cu ... cm^2.
12. Volumul unei prisme drepte cu bazele pătrate, cu muchia bazei de 10 cm şi măsura unghiului dintre diagonala prismei şi planul bazei de 60° este egal cu ... cm^3.
13. Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate cu înălţimea de 6 cm şi apotema bazei de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.
14. Volumul unei piramide triunghiulare regulate cu aria bazei egală cu $12\sqrt{3}$ cm^2 şi aria totală egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2 este egal cu ... cm^3.
15. Aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu înălţimea de $3\sqrt{2}$ cm şi volumul egal cu $54\sqrt{6}$ cm^3 este egală cu ... cm^2.
16. Aria totală a unui tetraedru regulat cu muchia bazei de 6 cm este egală cu ... cm^2.
17. Volumul unui tetraedru regulat cu muchia bazei de 8 cm este egal cu ... cm^3.
18. Aria totală a unei piramide patrulatere regulate cu muchia bazei de 12 cm şi înălţimea de 8 cm este egalăm cu ... cm^2.
19. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate cu feţele laterale triunghiuri echilaterale cu lungimea laturii de 6 cm este egală cu ... cm^2.
20. Volumul unei piramide patrulatere regulate cu aria totală egală cu 324 m^2 lungimea laturii bazei de $6\sqrt{3}$ cm este egal cu ... cm^3.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

21. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu volumul 125 cm^3.
a) Calculați aria totală a cubului.
b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, determinați volumul piramidei $OA'B'C'D'$.

22. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are $AB = 2$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și $AE = 2$ cm.
a) Calculați aria totală a paralelipipedului.
b) Determinați volumul paralelipipedului.

23. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC are $AB=VA=6$ cm.
a) Demonstrați că muchiile VA și BC sunt perpendiculare.
b) Calculați volumul piramidei $VABC$.

24. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza ABC triunghi echilateral. Volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}$ cm^3. Muchiile AB și BB' sunt congruente, iar punctul M este mijlocul laturii $[AB]$.
a) Arătați că $AB = 6$ cm.
b) Determinați aria totală a prismei.

25. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, are $AB = 6$ cm și $AA' = 7$ cm.
a) Calculați volumul prismei.
b) Determinați aria totală a prismei.

26. Se consideră piramida triunghiulară regulată de vârf V și bază ABC, care are înălțimea de 12 cm și măsura unghiului format de planul bazei cu o față laterală de 60°.
a) Arătați că $AB=24$ cm.
b) Determinați volumul piramidei ABC.

27. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are ca baze pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ înălțimea $AA' = 9$ cm și diagonala $DB' = 3\sqrt{41}$ cm.
a) Determinați volumul prismei.
b) Calculați aria triunghiului ACD'.

28. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 6$ cm. Pe laturile pătratului $ABCD$ alegem punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$ astfel ca $AM = BN = CP = DQ = 2$ cm.
a) Demonstrați că $MNPQ$ este pătrat.
b) Calculați valoarea raportului dintre volumul cubului și volumul piramidei patrulatere regulate $O'MNPQ$, unde $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.

29. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, punctul N este mijlocul laturii $[BC]$ și $DM = 2\sqrt{5}$ cm.
a) Calculați aria totală a cubului.
b) Dacă aria triunghiului $A'MD$ este egală cu a cm^2, arătați că $9 < a < 10$..

30. Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ de vârf D și bază ABC are $BC = AD = 6$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.
a) Calculați volumul piramidei $ABCD$.
b) Determinați aria triunghiului AMN.

31. $SABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, măsura unghiului determinat de dreptele SM și SA este egală cu 90° și $SA = 6\sqrt{2}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați volumul piramidei $SABC$.

b) Fie punctele A' și B' mijloacele muchiilor SA și respectiv SB, iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC). Calculați aria triunghiului CPQ.

32. Piramida triunghiulară $ABCD$ are toate muchiile congruente de lungime 4 cm. Punctul M este mijlocul laturii AC.

a) Calculați aria triunghiului MBD.

b) Determinați volumul tetraedrului $ABCD$.

33. Piramida patrulateră regulată $SPACE$, de bază $PACE$, are muchia bazei $PA = 12$ cm și înălțimea $SO = 6$ cm.

a) Calculați volumul piramidei $SPACE$.

b) Știind că punctul M este mijlocul muchiei SP, arătați că dreapta MO este paralelă cu planul (SEC).

34. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, are muchia bazei $AB = 4$ cm și aria laterală egală cu 72 cm^2.

a) Arătați că muchia laterală a prismei este de 6 cm.

b) Calculați volumul piramidei a cărei bază coincide cu una din bazele prismei, iar vârful se găsește în centrul de greutate al celeilalte baze a prismei.

35. În prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat, măsura unghiului dintre diagonala BD' și planul (ABC) este de $60°$, iar latura bazei $ABCD$ este $AB = 5$ cm.

a) Demonstrați că dreptele $D'C$ și AD sunt perpendiculare.

b) Calculați aria laterală a prismei.

36. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, muchia bazei este de $6\sqrt{2}$ cm și volumul piramidei este egal cu $144\sqrt{3}$ cm^3. Punctul E este situat pe muchia AV astfel încât $AE = 2 \cdot VE$.

a) Arătați că triunghiul VAC este echilateral.

b) Calculați aria laterală a piramidei.

37. Piramida patrulateră regulată $VABCD$, de vârf V și bază $ABCD$, are muchia bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm. Punctul M este mijlocul laturii BC.

a) Calculați aria laterală a piramidei.

b) Fie punctul N situat pe latura $[AB]$ astfel încât $NB = 3 \cdot AN$. Calculați aria triunghiului MND.

38. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu 60 cm, iar lungimea diagonalei $AC' = 9$ cm.

a) Calculați aria totală a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

b) Știind că $AB = BC = 4$ cm, calculați perimetrul dreptunghiului $ACC'A'$.

39. Muchia cubului $ABCDA'B'C'D'$ este $AB = 4$ cm. Punctele M și N se află pe muchiile DD', respectiv BB', astfel încât $MD' = BN = 1$ cm.

a) Calculați aria totală a piramidei triunghiulare regulate $ACD'B'$.

b) Calculați aria triunghiului AMN.

40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic care are $AB = 6\sqrt{2}$ cm, BC=6 cm și măsura unghiului $BA'C$ est egală cu $30°$.

a) Arătați că $AA' = 6$ cm.

b) Calculați aria totală a paralelipipedului.

Scanned with OKEN Scanner

Variante de subiecte 3

3.1. Subiecte date la Evaluarea Națională în anii 2010 – 2012

3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Scanned with OKEN Scanner

3.1. Subiecte date la Evaluarea Națională în anii 2010-2012

Testul 1 Evaluarea Națională, 27 iunie 2012

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12+12:4$ este egal cu...

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 7 și 23 este egală cu ...

(5p) **3.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x\leq 4\}$. Mulțimea A este egală cu intervalul ...

(5p) **4.** Perimetrul unui romb cu latura de 4 cm este egal cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat cubul $ABCDEFGH$ cu muchia de 5 cm. Aria totală a cubului este egală cu ... cm^2.

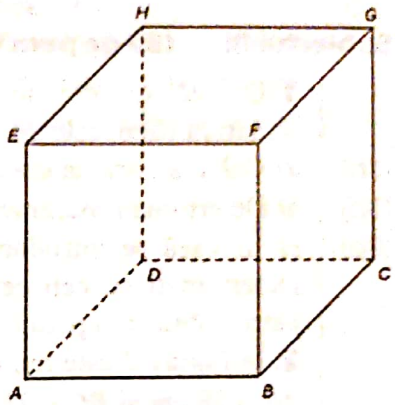
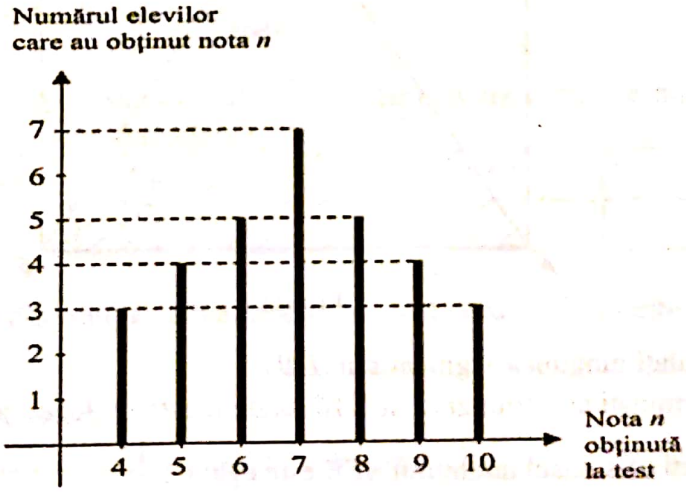


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la un test. Numărul elevilor din clasă care au obținut la test cel puțin nota 8 este egal cu.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Se consideră numerele $a=\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$ și $b=\sqrt{15}:\sqrt{3}+1$. Calculați media geometrică a celor două numere.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 26 de elevi. Dacă din clasă ar pleca două fete și trei băieți, atunci numărul fetelor ar fi egal cu dublul numărului băieților. Determinați numărul fetelor din clasă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a,-a)$ aparţine graficului funcţiei f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(1+\frac{2-x}{x+1}\right):\frac{x-1}{(2x+1)^2-(x+2)^2}$, unde x este număr real, $x\neq 1$ şi $x\neq -1$. Arătaţi că $E(x)=9$, pentru orice x număr real, $x\neq 1$ şi $x\neq -1$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O vază are forma unei prisme drepte cu baza pătrat. Înălţimea vazei este de 40 cm, iar latura bazei este de 10 cm. În vază se toarnă trei litri de apă.

(5p) *a)* Calculaţi aria laterală a vazei.

(5p) *b)* Determinaţi înălţimea la care se ridică apa în vază.

(5p) *c)* În vază se introduc patru cuburi din piatră, fiecare cub având muchia de 4cm. Determinaţi cu câţi centimetri creşte nivelul apei din vază, după introducerea celor patru cuburi din piatră.

2. În Figura 2 este reprezentată schematic o placă de gresie în formă de dreptunghi, cu $AB=28$ cm şi $BC=21$cm.

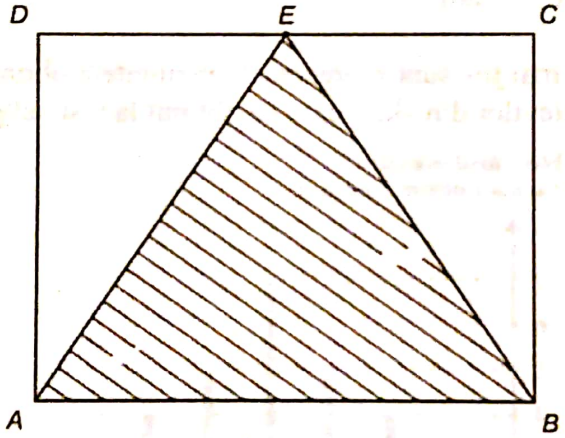


Figura 2

(5p) *a)* Calculaţi lungimea segmentului (DB).

(5p) *b)* Determinaţi aria triunghiului EAB, unde E este mijlocul laturii (CD).

(5p) *c)* Arătaţi că sinusul unghiului AEB este egal cu $\frac{11}{13}$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 2 Evaluarea Națională 27 iunie 2012, subiect de rezervă

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $12 - 6 : 3$ este egal cu...

(5p) **2.** Dacă y este un număr real nenul și $\frac{3}{y} = \frac{x}{4}$, atunci produsul $x \cdot y$ este egal cu...

(5p) **3.** Cel mai mare număr natural din intervalul $(0,6)$ este egal cu...

(5p) **4.** Un romb cu perimetrul de 32 cm are lungimea unei laturi egală cu ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$. Dacă o muchie are lungimea de 5 cm, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu ...cm.

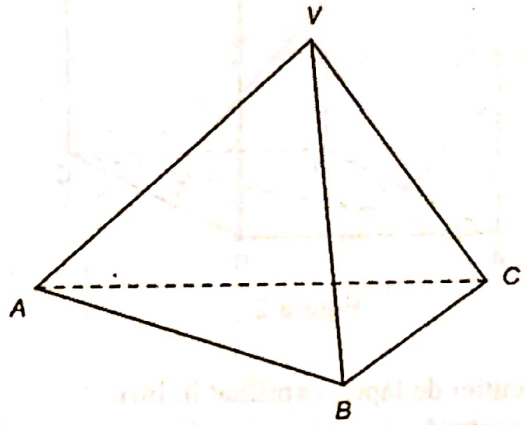


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor dintr-o echipă de fotbal după înălțimile lor măsurate în centimetri.

Înălțimea (cm)	140 – 149	150 – 159	160 – 170
Număr elevi	2	3	6

Numărul elevilor din echipă cu înălțimea mai mică decât 160 cm este egal cu ...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Arătați că numărul $a = \left|\sqrt{5} - 3\right| + \frac{4}{3 - \sqrt{5}}$ este întreg.

(5p) **3.** Numărul păsărilor dintr-o gospodărie este mai mare decât 70, dar mai mic decât 80. O treime din numărul păsărilor sunt găini, un sfert din numărul păsărilor sunt rațe și restul sunt gâște. Determinați numărul gâștelor din gospodărie.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-7)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x) = \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$, unde x este număr real, $x \neq 0$.

Arătați că $E(x) = -2$, pentru orice număr real x, $x \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

(5p) **1.** În Figura 2 este reprezentat ambalajul unei cutii de lapte care are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDMNPQ$, în care $AM = 10$ cm, $AB = 6$ cm și $BC = 5$ cm

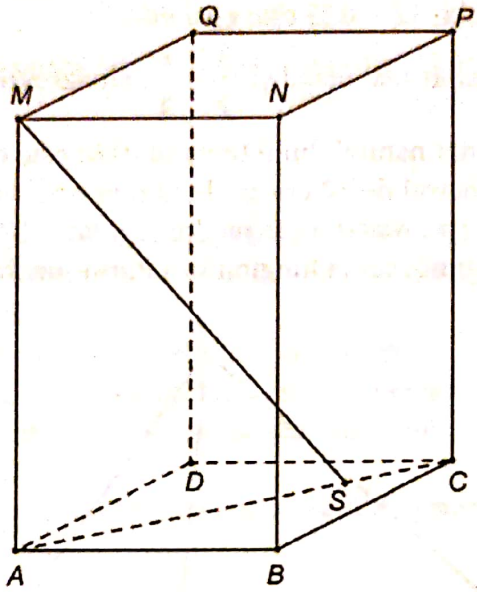


Figura 2

(5p) *a)* Calculați volumul cutiei de lapte, exprimat în litri.

(5p) *b)* Calculați aria, exprimată în centimetri pătrați, a suprafeței de material necesar pentru un ambalaj, știind că pierderile la îmbinări reprezintă 10% din aria totală a cutiei.

(5p) *c)* Se introduce în cutie un pai, prin vârful M, până în punctul $S \in (AC)$, fără să cadă în cutie, astfel încât $AS = 7{,}5$ cm. Arătați că lungimea paiului este mai mare de 12 cm.

2. Figura 3 reprezintă schița unei mese formate dintr-un dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 4$ m și $BC = 2$ m și două semicercuri cu diametrele $[AD]$, respectiv $[BC]$.

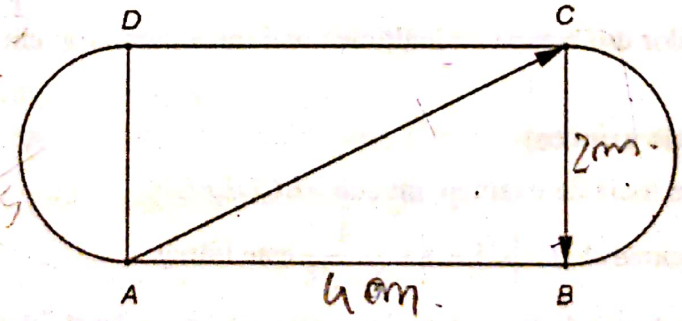


Figura 3

(5p) *a)* De-a lungul marginii mesei se lipește o bandă protectoare. Determinați lungimea acestei benzi.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței mesei.

(5p) *c)* O buburuză parcurge, mergând doar pe marginea mesei, traseul $A - B - C$, iar o furnică parcurge segmentul $[AC]$ și, în continuare, segmentul $[CB]$. Arătați că lungimea traseului parcurs de buburuză este mai mare decât lungimea traseului parcurs de furnică. ($3{,}14 < \pi < 3{,}15$)

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3 Evaluarea Națională 6 iunie 2012, sesiunea specială

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $18-12:3$ este egal cu...

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 17 și 23 este egală cu...

(5p) **3.** Un sfert din lungimea unui drum reprezintă 12 km. Lungimea drumului este egală cu ... km.

(5p) **4.** Suma dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este egală cu 10 cm. Perimetrul acestui dreptunghi este egal cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră cubul $ABCDMNPQ$ din Figura 1. Măsura unghiului dintre dreptele AB și DQ este egală cu ....°

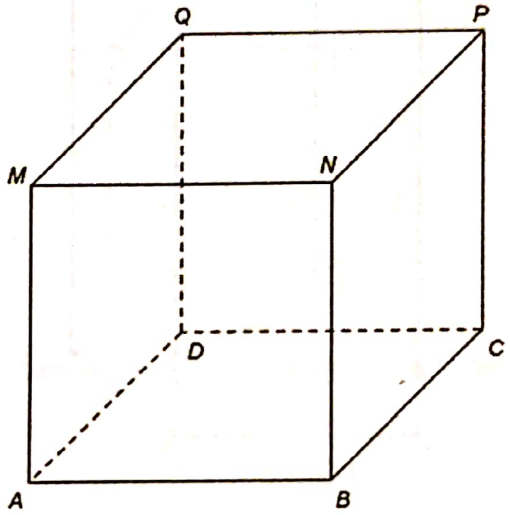


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase după înălțimile lor, măsurate în centimetri.

Înălțimea (cm)	120 – 129	130 – 139	140 – 149	150 – 160
Număr elevi	2	3	15	5

Numărul elevilor care au înălțimea mai mică de 140 cm este egal cu ...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.

(5p) **2.** Arătați că $a=2\cdot(8+\sqrt{18})-3\cdot(4+\sqrt{8})$ este număr întreg.

(5p) **3.** Un pix și o carte costă 10 lei, cartea și un caiet costă 9 lei, iar caietul și pixul costă 5 lei. Determinați prețul cărții.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6-3x$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Determinați numărul real p pentru care punctul $A(p,p+4)$ aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(2-\frac{8}{x+2}\right):\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq 2$. Arătați că $E(x)=2$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq 2$

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat schematic un turn format din prisma dreaptă $ABCDMNPQ$ cu baza pătrat şi piramida patrulateră regulată $SMNPQ$. Se ştie că: $AB = 5$m, $AM = 12$m şi $m(\sphericalangle MSN) = 60°$.

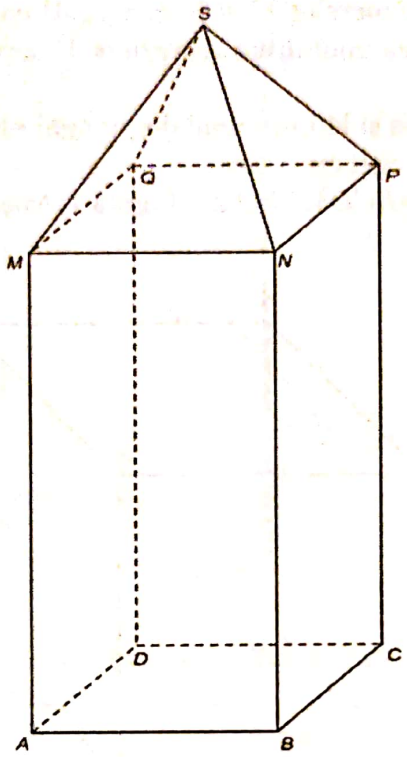


Figura 2

(5p) *a)* Calculaţi distanţa dintre punctele D şi M.

(5p) *b)* Calculaţi aria laterală a piramidei $SMNPQ$.

(5p) *c)* Arătaţi că înălţimea turnului este mai mică decât 16 m.

2. Dreptunghiul $ABCD$ din Figura 3 reprezintă schiţa unei mese de biliard. Dimensiunile mesei sunt $AB = 12$ dm şi $BC = 18$ dm

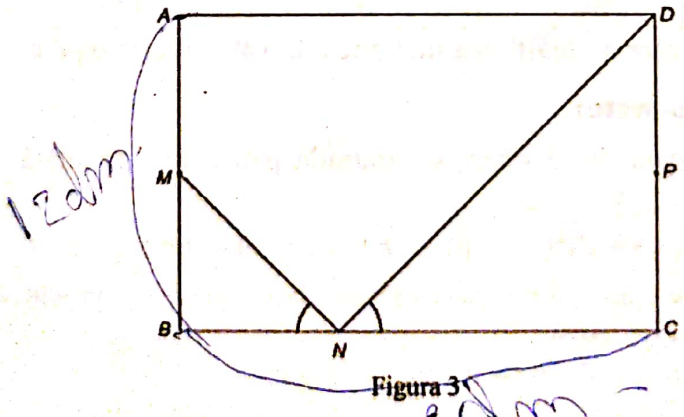


Figura 3

(5p) *a)* Calculaţi aria dreptunghiului $ABCD$, exprimată în metri pătraţi.

(5p) *b)* Determinaţi perimetrul triunghiului APB, unde P este mijlocul segmentului (CD).

(5p) *c)* O bilă se află în punctul M, mijlocul laturii (AB). Un jucător loveşte bila care atinge latura (BC) în punctul N şi apoi ajunge în punctul D. Ştiind că unghiurile MNB şi CND sunt congruente, arătaţi că dreptele MN şi ND sunt perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 4 Evaluarea Naţională 2012, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10 - 10 : 5$ este egal cu....

(5p) **2.** Numerele întregi din intervalul $[-5,4]$ sunt în număr de...

(5p) **3.** Cincizeci de kilograme de castraveţi costă 200 lei. Cinci kilograme de castraveţi de aceeaşi calitate costă ... lei....

(5p) **4.** Un trapez cu înălţimea de 8 cm si linia mijlocie de 10 cm are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Dacă aria totală a cubului este egală cu 600 cm^2, atunci muchia cubului este de ... cm

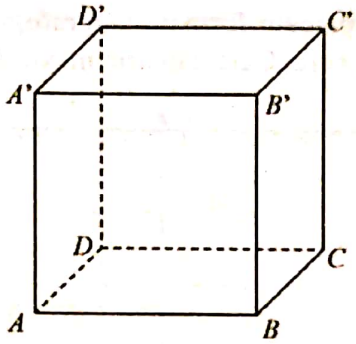


Figura 1

(5p) **6.** Numărul elevilor dintr-un lot de atletism şi vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârsta (ani)	11	12	13	14
Număr elevi	9	4	5	2

Numărul elevilor din lot este egal cu...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCMNP$ cu baza ABC triunghi echilateral.

(5p) **2.** Calculaţi $5a - 11b + 21c$, ştiind că $2a + b - 3c = 15$ şi $a - 4b + 8c = 25$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5p) **3.** Maria a citit în 5 zile o carte care are 230 de pagini. În fiecare zi, începând cu a doua, Maria a citit cu trei pagini mai mult decât în ziua precedentă. În a câta zi numărul total de pagini citite în ziua respectivă este un număr prim?

4. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+5$.

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia f în sistemul de coordonate xOy.

(5p) *b)* Calculaţi aria triunghiului determinat de reprezentările grafice ale celor două funcţii şi axa Oy.

(5p) **5.** Calculaţi $x^2+\frac{1}{x^2}$, ştiind că $x+\frac{1}{x}=3$, unde $x\in\mathbb{R}^*$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Laboratorul unei cofetării prepară bomboane în formă de piramidă triunghiulară regulată cu muchia laterală de 2 cm si cu muchia bazei de 3 cm.

(5p) *a)* Arătaţi că înălţimea piramidei este de 1 cm.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) *b)* Calculați volumul unei bomboane.

(5p) *c)* Fiecare bomboană este acoperită în totalitate cu staniol. Arătați că aria suprafeței minime de staniol necesar împachetării a 100 de bomboane este mai mare decât 960 cm^2 (se neglijează pierderile la suprapuneri).

2. Figura 2 reprezintă schița unei grădini dreptunghiulare $MNPQ$ și a aleilor din interiorul ei. Se știe că $MN = 100$ m, $NP = 60$ m, $RS = TU = VX = ZY = 4$ m, $MV = XN = PR = SQ$ și $QT = UM = YN = PZ$.

(5p) *a)* Segmentele RS, TU, VX și ZY reprezintă porți de acces în grădină. Se împrejmuiește grădina cu gard, nu și în dreptul porților. Calculați lungimea gardului exterior care înconjoară grădina.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței ocupate de alei.

(5p) *c)* În interiorul fiecărei parcele formate (suprafețe hașurate) se amenajează câte un strat cu flori, în formă de cerc. Calculați aria maximă a unui astfel de strat.

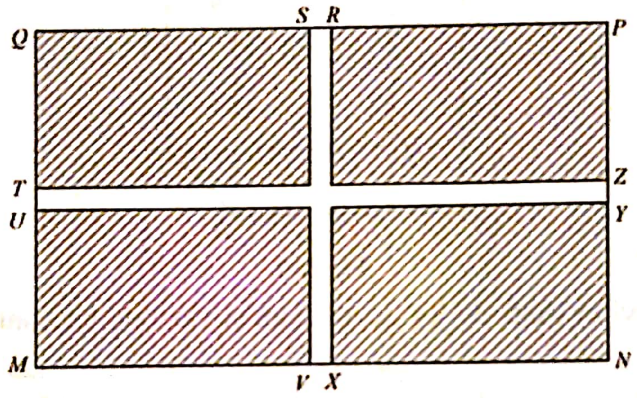


Figura 2

Testul 5 Evaluarea Națională 22 iunie 2011

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $6 + 16 : 4$ este egal cu ....

(5p) **2.** Într-o urnă sunt 7 bile albe și 3 bile albastre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albastră este egală cu ... .

(5p) **3.** Trei kilograme de mere costă 7,5 lei. Patru kilograme de mere de aceeași calitate costă ... lei

(5p) **4.** Un dreptunghi are lungimea de 8 cm și lățimea egală cu $\frac{3}{4}$ din lungime. Lățimea dreptunghiului este de ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentată o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ care are toate fețele laterale pătrate. Măsura unghiului dintre dreptele AB' și CC' este egală cu ...°

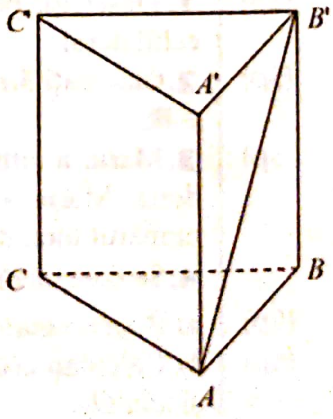


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei școli după notele obținute la un concurs.

Note	Mai mici decât 5	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	8	12	25	20	15	8	2

Numărul elevilor care au obținut o notă mai mică decât 7 este egal cu...

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf V și bază ABC.

(5p) **2.** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care are loc egalitatea $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{b+1}$.

(5p) **3.** Prețul unui televizor s-a mărit cu 10%. După un timp, noul preț al televizorului s-a micșorat cu 10%. După aceste două modificări, televizorul costă 1980 lei. Determinați prețul inițial al televizorului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului care are abscisa egală cu ordonata și aparține graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{6})+(\sqrt{2}-1)^2-3\sqrt{3}$ este natural.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Prisma patrulateră dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele pătrate (Figura 2) reprezintă schematic un suport pentru umbrele. Segmentul $[AP]$ reprezintă o umbrelă care se sprijină in punctul C'. Se știe că $AB = 30$ cm, $AC = CC'$ și $AP = 90$ cm.

(5p) *a)* Calculați înălțimea suportului.

(5p) *b)* Determinați măsura unghiului dintre dreapta AP și planul (ABC).

(5p) *c)* Determinați distanța de la punctul P la planul (ABC).

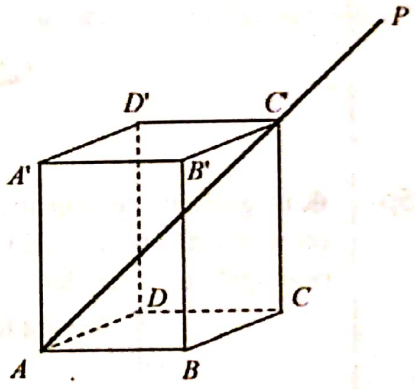


Figura 2

2. Figura 3 reprezintă schița unei grădini dreptunghiulare în care sunt plantate flori în trei zone, una în formă de cerc și două în formă de semicerc, care intersectează laturile $[AD]$ și $[BC]$ doar în punctele A,B,C,D,E și F. Zona circulară intersectează cele două zone semicirculare doar în punctele M și N. Se știe că $AB = 16$ m.

(5p) *a)* O albină așezată pe o floare situată în mijlocul diametrului $[AB]$ zboară în linie dreaptă, mai întâi până la o floare situată în punctul M, apoi mai departe, tot în linie dreaptă, până la o floare situată în punctul D. Calculați distanța parcursă de albină.

(5p) *b)* Calculați aria suprafeței din grădină plantată cu flori.

(5p) *c)* Arătați că aria suprafeței reprezentată de porțiunea haşurată este mai mică decât 111 m^2. $(3,14<\pi<3,15)$.

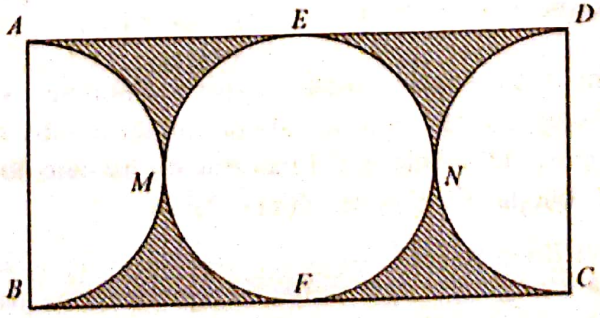


Figura 3

Scanned with OKEN Scanner

Testul 6 Evaluarea Națională 8 iunie 2011, sesiunea specială

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Inversul numărului $\frac{5}{3}$ este egal cu ....

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 8 și 12 este egală cu ...

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea soluțiilor inecuației $2x-4\geq 0$ este egală cu ...

(5p) **4.** Un pătrat cu perimetrul de 16 cm are latura de ... cm.

(5p) **5.** În Figura 1 este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$ în care $AB = 5$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu ... cm.

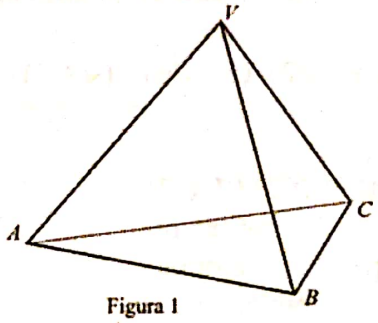
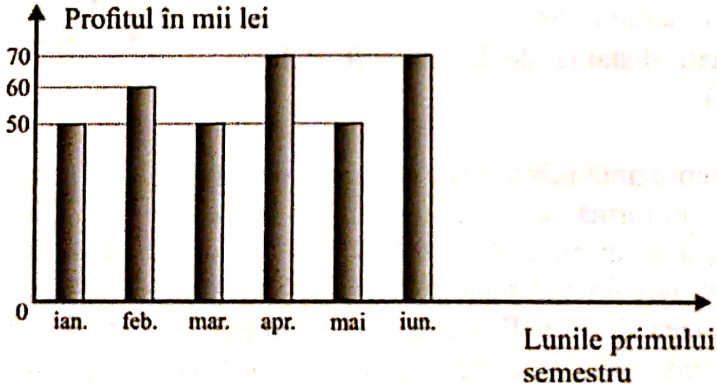


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate profiturile lunare ale unei firme în primul semestru al anului 2011. Profitul total realizat de firmă în această perioadă de timp este egal cu ... mii lei.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

(5p) **2.** Enumerați elementele mulțimii $A=\left\{x \middle| x\in\mathbb{Z}-\{-1\}, \frac{3x+2}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

(5p) **3.** Se consideră două numere reale pozitive distincte. Suma lor se înmulțește cu diferența lor. Produsul astfel obținut este un număr pozitiv cu 4 mai mic decât pătratul numărului mai mare. Determinați cel mai mic dintre cele două numere.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Calculați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și de axele de coordonate Ox și Oy.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) **5.** Daţi un exemplu de 3 numere întregi a, b, c astfel încât să aibă loc egalitatea $x^3-3x^2-10x=(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)$ pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O cameră frigorifică în formă de paralelipiped dreptunghic este plină cu pachete cubice, fiecare având latura de 4 dm, fără să rămână goluri între ele. Podeaua camerei frigorifice este acoperită complet cu un strat de 7 pachete. Înălţimea camerei este de 5 ori mai mare decât înălţimea unui pachet.

(5p) *a)* Calculaţi aria suprafeţei podelei încăperii.

(5p) *b)* Arătaţi că aria laterală a camerei frigorifice este egală cu 1280 dm^2.

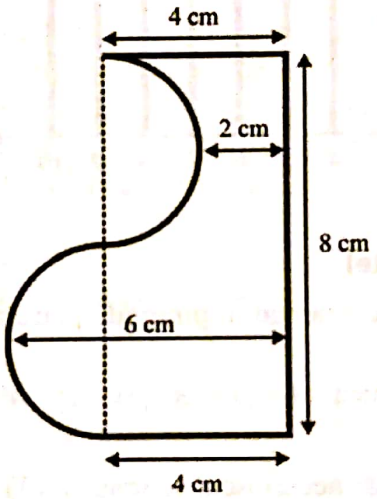
(5p) *c)* Determinaţi volumul camerei frigorifice, exprimat în litri.

2. Figura 2 reprezintă schiţa unei piese de carton, linia curbă reprezentând două semicercuri.

(5p) *a)* Calculaţi lungimea conturului piesei.

(5p) *b)* Determinaţi aria suprafeţei piesei.

(5p) *c)* Arătaţi că există un mod de aranjare, fără suprapunere, a mai multor piese de acest fel (avem la dispoziţie oricâte piese) astfel încât să acopere complet un pătrat cu lungimea laturii de 16 m.



Testul 7 Evaluarea Naţională 2011, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă $31-7+9-x=20$, atunci numărul x este egal cu....

(5p) **2.** Un biciclist urcă o pantă în 20 de minute. La coborârea aceleiaşi pante, biciclistul îşi dublează viteza. Timpul în care biciclistul coboară panta este de ... minute.

(5p) **3.** După o reducere cu 15%, un penar costă 34 lei. Preţul iniţial al penarului a fost de ... lei.

(5p) **4.** Un dreptunghi cu lungimea de 9 cm şi lăţimea egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime are aria egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră cubul *ALGORITM* din Figura 1. Măsura unghiului dintre dreptele AM şi LG este egală cu ... °.

Scanned with OKEN Scanner

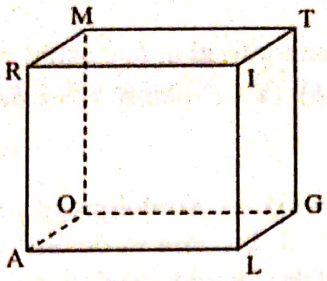
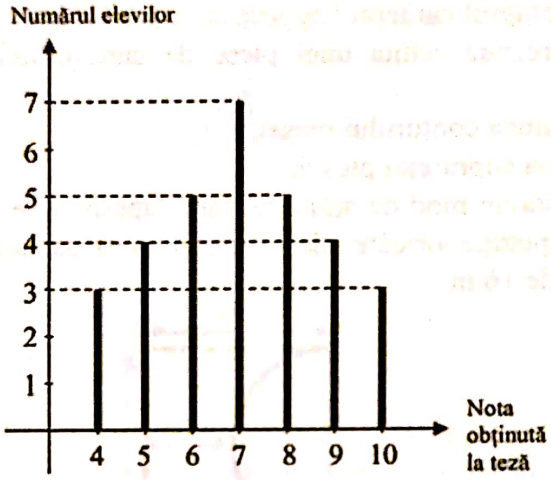


Figura 1

(5p) **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de toți elevii unei clase la teza din semestrul al II-lea la matematică. Numărul elevilor din acea clasă este egal cu...



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată care are baza $ABCD$ și vârful V.

(5p) **2.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}/|3x-2|\leq 4\}$. Enumerați elementele mulțimii $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Din dublul unui număr necunoscut se scade $0,(3)$. Diferența obținută se împarte la $1,4(6)$ și se obține rezultatul $0,(45)$. Determinați numărul necunoscut.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+5$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-1)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $a=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2+(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})$ este întreg.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un vas în formă de cub cu lungimea muchiei de 1 m este plin cu apă. Se golește toată apa din vasul cubic într-un vas în formă de paralelipiped dreptunghic care are înălțimea de 10 dm, iar dimensiunile bazei de 25 dm și de 8 dm.

(5p) *a)* Calculați câți litri de apă sunt în vasul cubic.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a vasului paralelipipedic.

(5p) *c)* Calculați înălțimea la care se ridică apa în vasul paralelipipedic.

Scanned with OKEN Scanner

2. Figura 2 reprezintă schiţa unui rond de flori, circular, care se află în interiorul unei grădini dreptunghiulare şi care este tangent laturilor (AB) şi (CD) ale grădinii în punctele M, respective N. Se ştie că: $AB = 9$ m şi $BC = 6$ m.

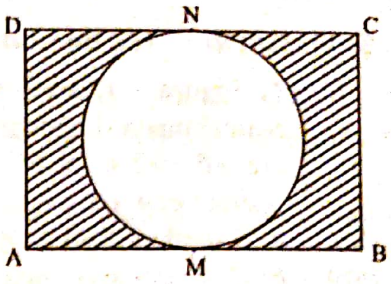


Figura 2

(5p) *a)* Calculaţi aria rondului.

(5p) *b)* Verificaţi dacă aria porţiunii haşurate este mai mică decât aria rondului circular. $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$.

(5p) *c)* Arătaţi că, oriunde am planta doi copaci în zona haşurată a grădinii, distanţa dintre aceştia este mai mică decât 11 m.

Testul 8 Evaluarea Naţională, 12 mai 2010

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2 + 4 : 2$ este egal cu....

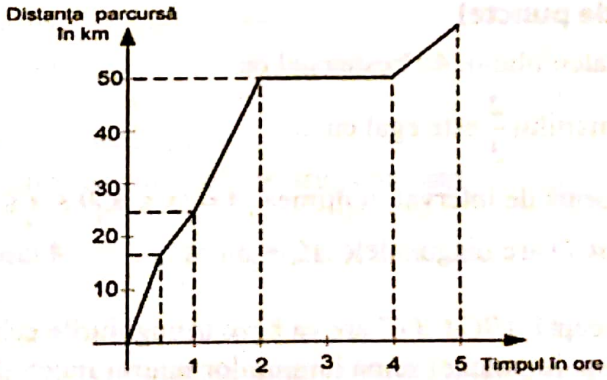
(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 2 şi 8 este egală cu ...

(5p) **3.** Dacă $A = \{1; 2; 3\}$ si $B = \{3; 4\}$, atunci mulţimea $A \cap B$ este egală cu $\{...\}$.

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are latura de 4 m. Aria triunghiului este egală cu ...m^2.

(5p) **5.** O prismă dreaptă are ca baze triunghiurile echilaterale ABC, respectiv $A'B'C'$. Măsura unghiului dintre dreptele AB şi $B'C'$ este egală cu ... °.

(5p) **6.** Figura de mai jos reprezintă graficul deplasării unui vehicul pe parcursul a 5 ore. În această perioadă, vehiculul staţionează timp de ... ore.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S şi bază ABC.

(5p) **2.** Un elev cumpără 10 cărţi, de literatură şi de matematică. El plăteşte 9 lei pentru o carte de literatură şi 7 lei pentru o carte de matematică, cheltuind astfel 76 lei. Câte cărţi de matematică a cumpărat elevul?

3. O persoană are o sumă S de bani. În prima zi cheltuieşte 30% din suma S, a doua zi cheltuieşte 40% din suma S, iar a treia zi cheltuieşte $\frac{1}{4}$ din suma S.

(5p) *a)* În ce zi cheltuieşte cel mai puţin persoana respectivă?

(5p) *b)* Persoanei îi rămân 100 de lei după cele 3 zile. Determinaţi valoarea sumei S.

(5p) **4.** Reprezentaţi grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.

(5p) **5.** Arătaţi că numărul $p = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \sqrt{5}(\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$ este natural.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura 1 reprezintă schiţa unui bazin în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Baza $ABCD$ are $AB = 12$ m şi $BC = 4$ m, iar înălţimea paralelipipedului este $AA' = 3$ m.

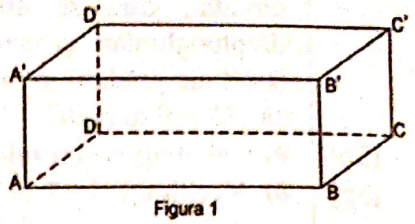


Figura 1

(5p) *a)* Calculaţi distanţa dintre punctele A şi C'?

(5p) *b)* Calculaţi aria laterală a bazinului.

(5p) *c)* În bazin se află 96000 litri de apă. Calculaţi înălţimea la care se ridică apa în bazin.

2. Figura 2 reprezintă schiţa unui patinoar format dintr-un dreptunghi $MNPQ$ care are lungimea MN de 40 m şi lăţimea de 30 m şi din două semicercuri de diametre $[MQ]$, respectiv $[NP]$.

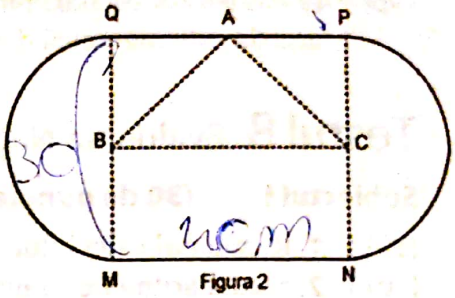


Figura 2

(5p) *a)* Patinoarul este înconjurat de un gard. Calculaţi lungimea gardului care înconjoară patinoarul.

(5p) *b)* Verificaţi dacă aria patinoarului este mai mică decât 2000 m^2. $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$.

(5p) *c)* Un patinator parcurge distanţele AB, BC şi CA. Punctele B şi C sunt mijloacele segmentelor $[MQ]$, respectiv $[NP]$ şi A este mijlocul segmentului $[PQ]$. Calculaţi valoarea sinusului unghiului ABC.

Testul 9 Evaluarea Naţională 2010, sesiunea specială

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului 624 :3 este egal cu...

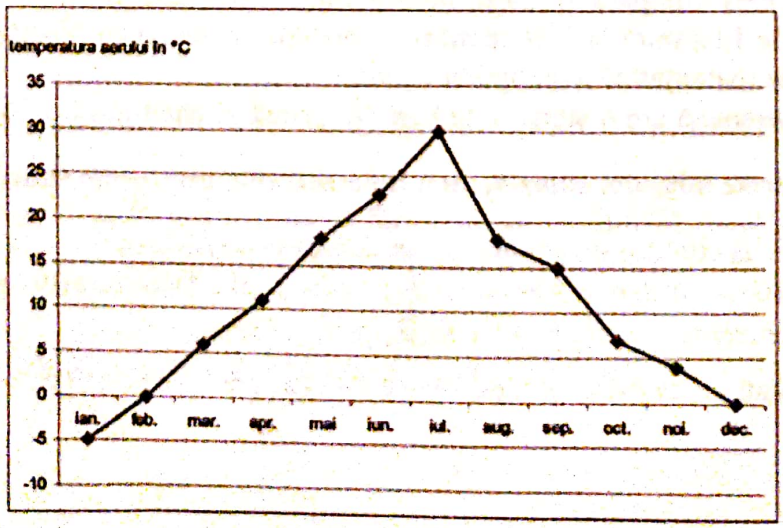
(5p) **2.** Inversul numărului $\frac{2}{3}$ este egal cu ...

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3\}$ este egală cu ...

(5p) **4.** Un romb $ABCD$ are diagonalele $AC = 5$ cm şi $BD = 4$ cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC şi $A'B'C'$. Dacă $AB = AA' = 4$m, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor prismei este egală cu ... m.

(5p) **6.** În graficul de mai jos, diferenţa dintre temperatura cea mai mare şi cea mai mică este egală cu ... °C.



Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC.

(5p) **2.** Media aritmetică a două numere naturale este 17,5 și unul dintre numere este 7. Determinați al doilea număr.

3. Prețul unui telefon mobil a scăzut cu 10% și, după o săptămână, noul preț a scăzut cu încă 10%. După cele două modificări de preț, telefonul costă 81 de lei.

(5p) *a)* Arătați că prețul inițial al telefonului a fost de 100 de lei.

(5p) *b)* Cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul produsului după cele două ieftiniri?

(5p) **4.** Determinați valoarea numărului real a știind că punctul $A(2; a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-a)\cdot x+2$.

(5p) **5.** Simplificați raportul $\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25}$ cu $x-5$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura 1 reprezintă schița unui cort în formă de prismă dreaptă care are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și DEF. Se știe că $BC = 2$m și $CF = 3$m.

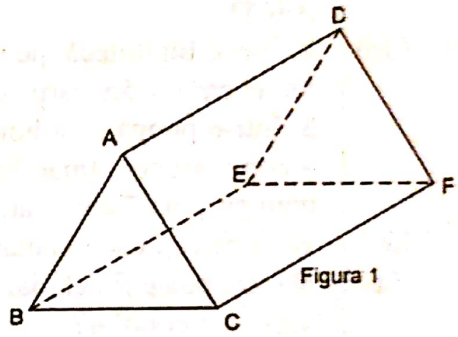


Figura 1

(5p) *a)* Calculați distanța de la punctul A la planul BCE).

(5p) *b)* Calculați volumul cortului.

(5p) *c)* Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 22 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua).

2. Figura 2 reprezintă schița unui teren a cărui arie este de 8 hectare.

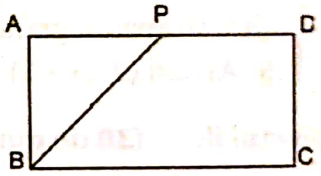


Figura 2

(5p) *a)* Exprimați aria terenului în m^2.

Pe acest teren, se sapă un șanț $[BP]$ pentru canalizare ($P\in AD$). Unghiurile ABP și PBC sunt congruente. Valoarea raportului dintre aria triunghiului ABP și aria dreptunghiului $ABCD$ este 0,25.

(5p) *b)* Arătați că $BC = 2AB$.

(5p) *c)* Calculați lungimea, exprimată în metri, a șanțului $[BP]$ și aproximați rezultatul cu cel mai apropiat număr natural.

Testul 10 Evaluarea Națională 2010, model subiect www.edu.ro

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $64 : 8 + 8$ este egal cu ....

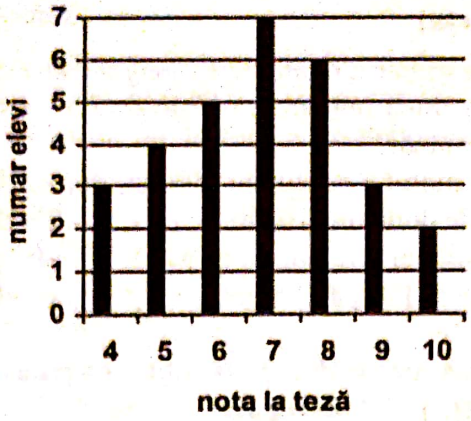
(5p) **2.** Fie mulțimile $A = \{-2, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 4\}$. Mulțimea $A\cap B = \{...\}$.

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 11 bile negre și 18 bile albe. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră este egală cu ...

(5p) **4.** Diametrul unui cerc este de 4 m. Lungimea razei cercului este egală cu ... m.

(5p) **5.** Aria totală a unui cub este egală cu 150 dm^2. Muchia acestui cub este de ... dm.

(5p) **6.** Toți elevii unei clase au susținut teza la matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform graficului, clasa are un număr de ... elevi.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf S și de bază $ABCD$.

(5p) **2.** Într-o bibliotecă, pe un raft se află 24 de cărți, iar pe alt raft se află de două ori mai multe cărți. Câte cărți se află, în total, pe cele două rafturi?

3. Într-o pungă sunt bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 4 copii, atunci rămân în pungă 3 bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 7 copii, atunci rămân în pungă 6 bomboane.

(5p) *a)* Verificați dacă în pungă pot fi 55 de bomboane.

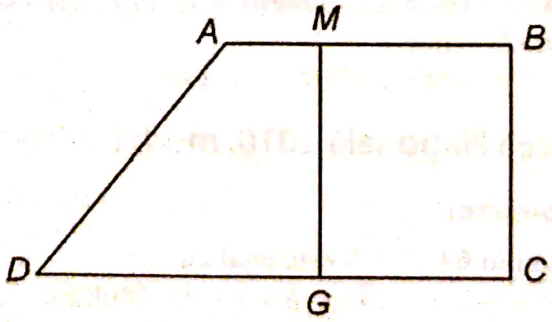
(5p) *b)* Care poate fi cel mai mic număr de bomboane din pungă, înainte ca acestea să fie împărțite copiilor?

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Verificați dacă punctele $P(0;\ 5)$ și $Q(5;\ 0)$ aparțin graficului funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $(x+2)^3-x-2=(x+1)(x+2)(x+3)$, pentru orice x număr real.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În figura de mai jos sunt ilustrate schematic pardoseala unui salon $AMGD$ și pardoseala unei camere de zi $MBCG$.
$AB=6$ m, $BC=5$ m, $CD=10$ m, M este un punct situat pe segmentul (AB), $AM=x$; (x este o distanță exprimată în metri; $0<x<6$).



(5p) *a)* Exprimați, în funcție de x, aria pardoselii camerei de zi $MBCG$.

(5p) *b)* Arătați că aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu $5(x+2)$ m^2.

(5p) *c)* Pentru ce valoare reală a lui x aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu aria pardoselii camerei de zi $MBCG$.

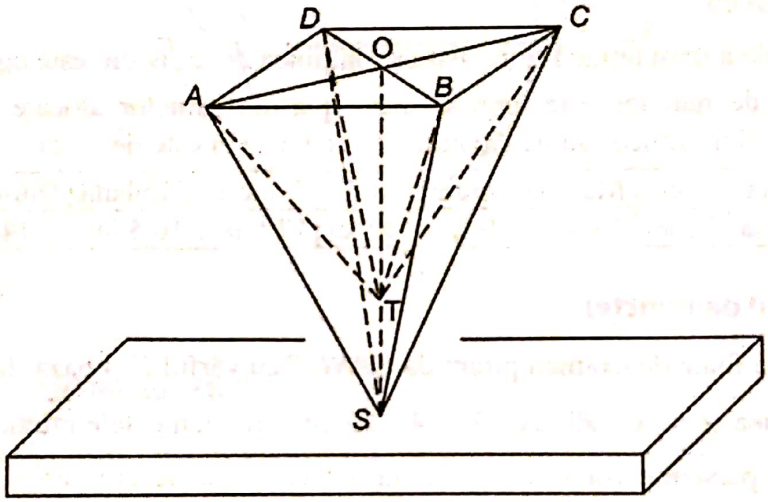
Scanned with OKEN Scanner

(5p) *d)* Se consideră $AM = 2$ m. O persoană cumpără gresie pentru salonul $AMGD$. Un metru pătrat de gresie costă 80 de lei. Pentru fiecare metru pătrat de gresie se acordă o reducere de 5 % oricărei persoane care cumpără mai mult de 10 m^2. Toată gresia cumpărată pentru salon are suprafața mai mare cu un metru pătrat decât suprafața salonului. Cât a costat în total gresia pentru salonul $AMGD$?

2. Figura de mai jos reprezintă schematic o fântână săpată în piatră. $SABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, de înălțime $SO = 9$ dm, în care este săpată o piramidă patrulateră regulată $TABCD$ corespunzătoare unui bazin plin cu apă. $ST = 3$ dm, iar baza $ABCD$ este un pătrat de latură $AB = 6$ dm.

(5p) *a)* Calculați aria totală a piramidei $SABCD$, în care este săpată fântâna.

(5p) *b)* Verificați dacă în bazinul $TABCD$ pot intra 70 de litri de apă.



Scanned with OKEN Scanner

3.2. Variante de subiecte propuse spre rezolvare

Testul 1

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului 216:2 este ... .

(5p) **2.** Media aritmetică a numerelor 6 şi 14 este ... .

(5p) **3.** Patru kg de mere costă 9,6 lei. Cinci kg de mere de aceeaşi calitate costă ... lei.

(5p) **4.** Un triunghi echilateral şi un pătrat au fiecare perimetrul de 24 cm. Raportul ariilor lor este egal cu ... .

(5p) **5.** Aria laterală a unui tetraedru regulat cu înălţimea de $2\sqrt{6}$ cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este reprezentată repartiţia sumelor alocate de o gospodină cumpărăturilor zilnice. Suma cheltuită în medie pe zi este de ... lei.

Ziua	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Suma	24 lei	36 lei	20 lei	40 lei	17,5 lei	16,5 lei	14 lei

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen piramida $CANOE$ cu vârful C şi baza $ANOE$.

(5p) **2.** Fie mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x-3|\le 4\}$. Enumeraţi elementele mulţimii $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Mai multe persoane vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare persoană contribuie cu câte 30 lei, nu ajung 40 lei, iar dacă fiecare contribuie cu 35 lei rămân 20 lei. Aflaţi câte persoane sunt şi cât costă obiectul.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+2$.

(5p) *a)* Determinaţi funcţia $f(x)$, ştiind că punctul $P(-1;1)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

(5p) *b)* Pentru $m=1$, reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) **5.** Arătaţi că numărul $a=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}\right)$ este întreg.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O piscină în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 50 m, lăţimea de 30 m şi adâncimea de 3 m.

(5p) *a)* Calculaţi volumul bazinului.

(5p) *b)* Dacă bazinul se umple cu apă până la înălţimea de 2 m, calculaţi câţi litri de apă intră în bazin.

(5p) *c)* Dacă bazinul se umple prin 10 robinete prin care curg 200 l apă pe minut din fiecare, aflaţi în cât timp (ore şi minute) se umple bazinul.

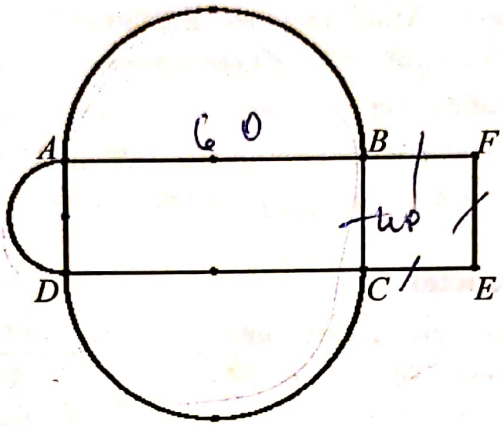
2. Un parc de distracţii are forma din figura următoare. Se ştie că $AB=60$ m şi $BC=40$ m, iar $BCEF$ este pătrat. Pe laturile $[AB]$, $[AD]$, $[CD]$ sunt construite în exterior semicercuri, ce fac parte din parcul de distracţii.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) *a)* Arătați că lungimea gardului care împrejmuiește parcul este mai mică de 146 m. $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$.

(5p) *b)* Fie S suprafața parcului. Arătați că $\frac{S-4000}{11\pi}$ este pătrat perfect.

(5p) *c)* Știind că biletul de intrare costă 40 lei pentru adulți și 20 lei pentru copii, iar într-o zi parcul este vizitat în medie de 620 adulți și 1000 copii, calculați venitul parcului într-o săptămână.



Testul 2

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ este … .

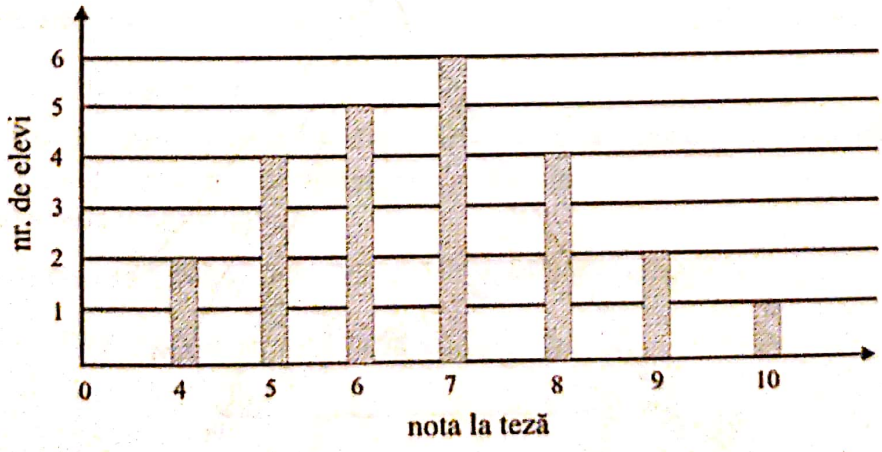
(5p) **2.** După o reducere de 10% prețul unui obiect a devenit 54 lei. Prețul inițial era ... lei.

(5p) **3.** Numărul 2,3(6) transformat în fracție ordinară ireductibilă este … .

(5p) **4.** Un dreptunghi are lungimea 12 cm și lățimea egală cu trei sferturi din lungime. Lățimea dreptunghiului este de … cm.

(5p) **5.** Volumul unui cub este egal cu 27 cm^3. Muchia cubului este de … cm.

(5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt reprezentate în graficul alăturat. Conform graficului, … elevi au obținut cel puțin nota 7 la teză.



Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Rezolvați ecuația: $\frac{2x-1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x+3}{6}$.

(5p) **3.** După ce a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, un turist constată că dacă mai parcurge 2 km ajunge la jumătatea drumului. Aflați lungimea drumului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$.

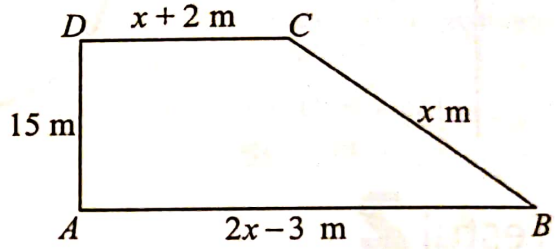
(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Aflați numărul real m pentru care punctul $P(m;-1)$ aparține graficului funcției f.

(5p) *c)* Calculați $f(1)+f(2)+...+f(50)$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Grădina unei case are forma unui trapez dreptunghic, ca în figura alăturată.



(5p) *a)* Fie E și F sunt mijloacele laturilor BC și AD. Calculați perimetrul figurii $ABEF$.

(5p) *b)* Determinați câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui complet grădina.

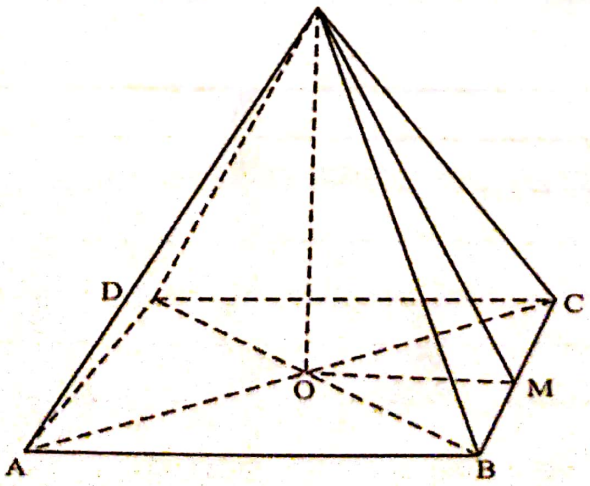
(5p) *c)* Calculați aria suprafeței grădinii.

2. La un laborator de cofetărie se primește ciocolată menaj având forma unei piramide patrulatere regulată, ca în figura de mai jos, cu latura bazei de 3 dm și înălțimea de 2 dm.

(5p) *a)* Calculați volumul piramidei de ciocolată.

(5p) *b)* Ciocolata este topită și din aceasta se realizează bomboane de forma unui cub cu muchia de 2 cm. Câte bomboane de această formă se pot realiza?

(5p) *c)* Bomboanele sunt ambalate în cutii de câte 15 bucăți, apoi acestea sunt așezate în cutii mai mari în care încap 5 cutii mici. Care este numărul de cutii mari necesare?



Hică!

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatele calculului $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}$ este.....

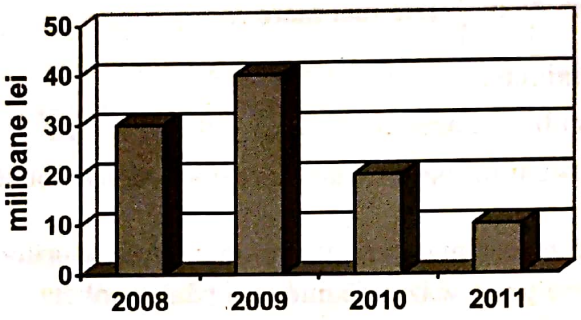
(5p) **2.** Dacă numărul $\overline{37x}$ este divizibil cu 2, atunci $x \in \{ ... \}$.

(5p) **3.** Opusul numărului -3 este numărul ... .

(5p) **4.** Aria laterală a unui cub cu muchia de 5 m, este egală cu ... m^2.

(5p) **5.** Complementul unghiului cu măsura de 42° are măsura de ... °.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată evoluția profitului unei societăți comerciale în perioada 2008-2011. Valoarea medie a profitului în această perioadă este egală cu ... milioane lei.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $MNPQM'N'P'Q'$.

(5p) **2.** O persoană a depus la bancă suma de 50000 lei. Dobânda băncii este de 6,5% pe an. Aflați ce sumă va avea la bancă acea persoană, după 2 ani, știind că dobânda se capitalizează.

(5p) **3.** Aflați x și y numere reale, știind că: $x^2+4y^2-6x+4y+10 \le 0$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+3$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Arătați că numărul $z=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot f(1)\cdot f(-3)}$ este natural.

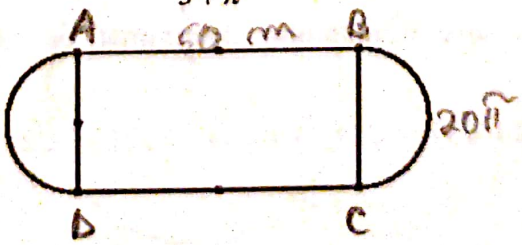
(5p) *c)* Calculați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $M(a^2;3a+5)$ se află pe graficul funcției f.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un teren de hochei are forma din figura alăturată. Lungimea dreptunghiului este de 50 m, iar lungimea unui semicerc este de 20π m.

(8p) *a)* Calculați aria dreptunghiului.

(7p) *b)* Dacă S este aria terenului, arătați că $\frac{S}{5+\pi}$ este pătrat perfect.



Scanned with OKEN Scanner

2. Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 20 dm şi 12 dm, iar înălţimea de 10 dm este plin cu apă. Se goleşte toată apa într-un vas ce are formă de cub cu lungimea muchiei de 2 m.

(5p) *a)* Calculaţi câţi litri de apă sunt în vasul în formă de paralelipiped dreptunghic.

(5p) *b)* Calculaţi aria totală a paralelipipedului dreptunghic.

(5p) *c)* Calculaţi înălţimea la care se ridică apa în vasul cubic.

Testul 4

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2+18:3=\ldots$.

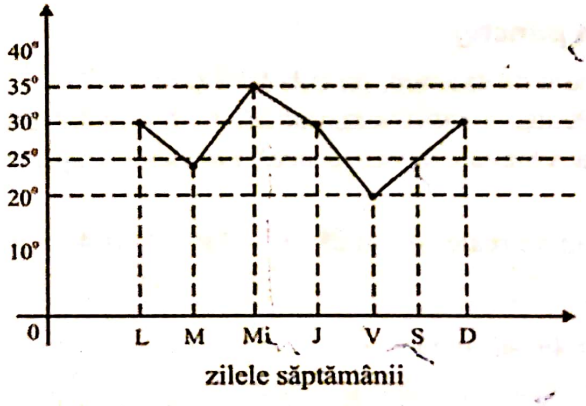
(5p) **2.** Dintre numerele $\frac{2}{3}$ şi $\frac{4}{3}$ este mai mare … .

(5p) **3.** Trei ore au … minute.

(5p) **4.** Volumul unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm este … cm^3.

(5p) **5.** Suma tuturor muchiilor unui tetraedru regulat cu aria totală de $25\sqrt{3}$ cm^2 este egală cu … cm.

(5p) **6.** Figura alăturată reprezintă graficul evoluţiei temperaturilor maxime într-o săptămână de vară. Temperatura a scăzut de miercuri până sâmbătă cu … ° C.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi o piramidă triunghiulară regulată de vârf şi bază.

(5p) **2.** În biblioteca şcolii, pe un raft sunt 48 de cărţi, pe un alt raft se află un sfert din numărul cărţilor aflate pe primul raft, iar pe al treilea o treime din numărul cărţilor aflate pe primele două rafturi. Câte cărţi sunt pe cele trei rafturi?

(5p) **3.** Să se rezolve inecuaţia: $(x-3)^2-(x-5)(x+5)\le 4x+14$.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) *b)* Calculaţi aria triunghiului determinat de graficul funcţiei f şi axele de coordonate.

(5p) **5.** Dacă $a=(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})-2\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, atunci arătaţi că $a\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un rezervor de apă are formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 5 m, lățimea de 4 m și înălțimea de 2 m. Exteriorul lui se vopsește, fiind necesari 2 litri de vopsea pentru fiecare metru pătrat, iar vopseaua este în cutii de 2 litri.

(5p) *a)* Câte cutii sunt necesare pentru vopsire?

(5p) *b)* Calculați cât costă vopseaua necesară, știind că 1 litru de vopsea costă 15 lei, iar dacă se cumpără mai mult de 10 litri se aplică o reducere de 10% la toată cantitatea cumpărată.

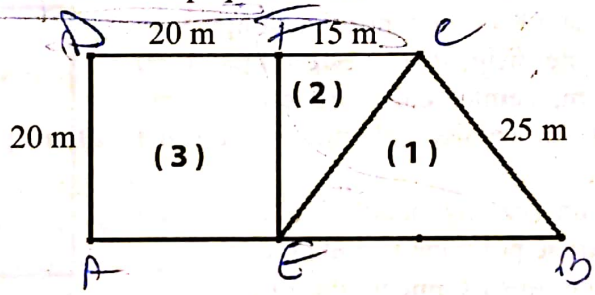
(5p) *c)* Pentru cât timp ar ajunge apa din acest rezervor dacă zilnic s-ar folosi pentru irigarea unui gazon 250 litri de apă? (Rezervorul este plin.)

2. În figura de mai jos este ilustrată schematic o grădină cu flori, împărțită în trei parcele: cu narcise (1), zambile (2) și crizanteme (3).

(5p) *a)* Calculați suprafața cultivată cu narcise.

(5p) *b)* Calculați suprafața grădinii.

(5p) *c)* Dacă pe un m^2 sunt 25 de fire de narcisă și un fir se vinde cu 1,5 lei, calculați câți lei s-au încasat pe narcisele de pe parcela 1.



Testul 5

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Media aritmetică a numerelor 10 și 12 este … .

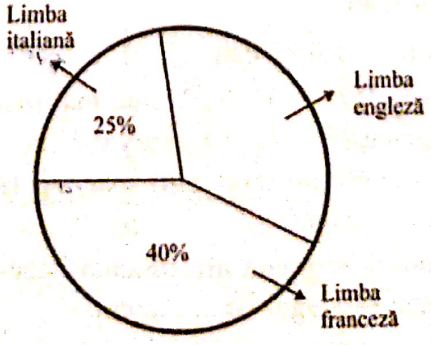
(5p) **2.** Descompunerea în factori primi a numărului 54 este … .

(5p) **3.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $(-3,1)$ este … .

(5p) **4.** Dacă $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$, atunci valoarea numărului real x este egală cu … .

(5p) **5.** O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu 6 cm și înălțimea egală cu 3 cm. Apotema piramidei este egală cu … cm.

(5p) **6.** Într-o școală sunt 1000 elevi care studiază limbi străine. În diagrama următoare este reprezentată repartiția elevilor școlii după prima limbă străină studiată. Numărul elevilor care studiază ca primă limbă, limba engleză, este egal cu … .



Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral.

(5p) **2.** La o piesă de teatru s-au vândut bilete la prețul de 6 lei, respectiv 10 lei biletul. Știind că s-au vândut 240 bilete și s-au încasat 2000 lei, calculați câte bilete cu 6 lei s-au vândut.

(5p) **3.** Arătați că: $(x-5)^3-x+5=(x-4)(x-5)(x-6)$, pentru orice număr real x.

(5p) **4.** Reprezentați grafic funcția:

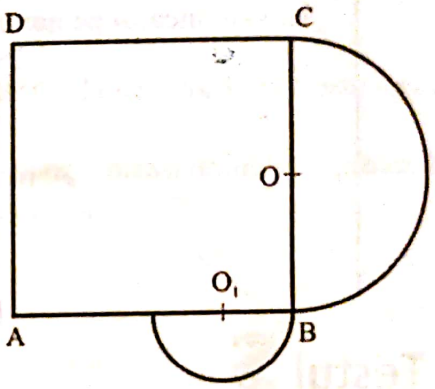
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-3)^2+2\cdot(x-1)(x+1)-3\cdot(x-1)^2+x.$$

(5p) **5.** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$, determinați numărul real m pentru care punctul $P(m,-1)$ se află pe graficul funcției f.

(5p) **6.** Arătați că numărul $a=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}+2\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ este natural.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În figura alăturată este reprezentată schița unui ștrand. În zona *OCD* sunt puse șezlonguri, în zona *ABOD* este nisip, *ABCD* este un pătrat cu latura de 20 m, semicercul mare este piscina pentru adulți, iar semicercul mic este piscina pentru copii.



(5p) *a)* Știind că un șezlong ocupă 2 m^2, calculați câte șezlonguri se pot pune în zona *OCD*.

(5p) *b)* Știind că lungimea semicercului mic este 5π, calculați suprafața ocupată de cele două piscine.

(5p) *c)* Calculați câți bani se încasează din închirierea șezlongurilor, dacă se închiriază în medie 80% din numărul acestora și că închirierea unui șezlong costă 20 lei.

2. Un bazin are formă de prismă patrulateră regulată cu muchia bazei de 2 m și înălțimea de 1 m.

(5p) *a)* De câte găleți de 10 litri de apă este nevoie pentru a umple bazinul?

(5p) *b)* În cât timp se golește bazinul plin printr-o vană cu debitul de 40 litri pe minut?

(5p) *c)* Care este înălțimea apei din bazin, când acesta este umplut până la 80% din capacitate?

Testul 6

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rădăcina pătrată a numărul 81 este.....

(5p) **2.** Dintre numerele $a=\sqrt{17}$ și $b=3\sqrt{2}$ este mai mare numărul.....

(5p) **3.** Soluția naturală a ecuației $x+2=3$ este egală cu.....

(5p) **4.** Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 84 cm. Muchia cubului are lungimea egală cu..... cm.

(5p) **5.** O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu 4 cm și înălțimea $2\sqrt{6}$ cm. Volumul prismei este egal cu..... cm^3.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) **6.** Diagrama următoare reprezintă numărul de cărți împrumutate de o bibliotecă școlară în ultimii 4 ani. Care a fost numărul mediu de cărți împrumutate în primii trei ani?

Anul	2008	2009	2010	2011
Număr de volume	200	250	450	300

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Un biciclist parcurge un drum în trei zile, astfel: în prima zi o treime din lungimea drumului, a doua zi două cincimi din rest, iar în a treia zi, ultimii 24 km. Determinați lungimea drumului și aflați câți kilometri a parcurs biciclistul în fiecare dintre zile.

(5p) **3.** Calculați ce salariu are în prezent un angajat, știind că inițial avea 1500 lei, după care salariul s-a redus cu 25%, iar după un timp noul salariu s-a mărit cu 8%.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu ordonata.

(5p) **5.** Arătați că numărul $a=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{15}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$ este natural.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Se cunosc $AB=16$ m, $BC=4$ m și $AA'=3$ m.

(5p) *a)* Calculați distanța dintre punctele A și C'.

(5p) *b)* Calculați aria totală a bazinului.

(5p) *c)* În bazin se află 128000 litri de apă. Calculați înălțimea la care se ridică apa în bazin.

2. Figura următoare reprezintă schița unui teren a cărui suprafață este de 5 ari. Se cunosc $AB=35$ m, $AD=20$ m, $N\in(DC)$, $NC=x$ (x este o distanță exprimată în metri). Suprafața $AMND$ este cultivată cu cartofi, iar suprafața $MBCN$ este cultivată cu sfeclă.

(5p) *a)* Calculați lungimea laturii DC.

(5p) *b)* Exprimați în funcție de x aria suprafeței cultivate cu cartofi și determinați pentru ce valoare a lui x aria lui $AMND$ este egală cu aria lui $MBCN$.

(5p) *c)* Știind că pe un ar de teren se recoltează 30 kg de sfeclă, aflați câte kg de sfeclă s-au recoltat.

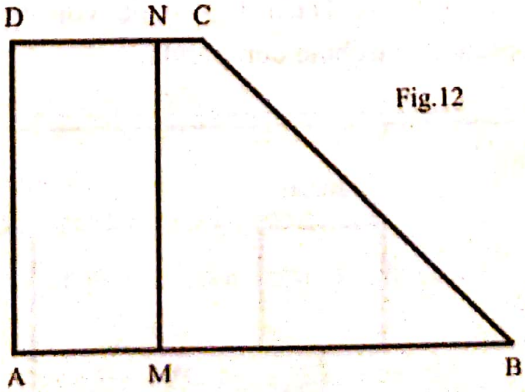


Fig.12

Scanned with OKEN Scanner

Testul 7

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Cel mai mare număr impar de trei cifre distincte este … .

(5p) **2.** Un divizor al numărului 24 este … .

(5p) **3.** Dacă $21-8+7-x=31$, atunci numărul x este egal cu … .

(5p) **4.** După o reducere de 15%, un ghiozdan costă 85 lei. Prețul inițial al ghiozdanului a fost de … lei.

(5p) **5.** Un dreptunghi cu lungimea de 12 cm și lățimea un sfert din lungime are perimetrul egal cu … cm.

(5p) **6.** Temperaturile medii înregistrate în prima săptămână a lunii ianuarie sunt reprezentate în tabelul următor:

Data	1 ian.	2 ian.	3 ian.	4 ian.	5 ian.	6 ian.	7 ian.
Temp. °C	-7°C	-4°C	-1°C	0°C	-3°C	-4,5°C	-2°C

Cea mai friguroasă zi a fost … .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $VABC$.

(5p) **2.** Un apicultor are 400 kg miere pe care le pune în borcane de câte 800 g fiecare. Aflați de câte borcane are nevoie pentru a pune întreaga cantitate de miere.

3. Pentru o carte și un caiet, Andrei plătește 60 lei. După o săptămână cartea se ieftinește cu 10%, iar prețul caietului crește cu 10%, astfel că pentru amândouă se va plăti 56 lei.

(5p) *a)* Care a fost prețul inițial al cărții?

(5p) *b)* Care este prețul cărții și al caietului după modificările de prețuri?

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.

(5p) **5.** Se dă $E(x)=(x+1)^2+(x-1)^2-(x-2)(x+2)$. Calculați $E(1)+E(\sqrt{2})$.

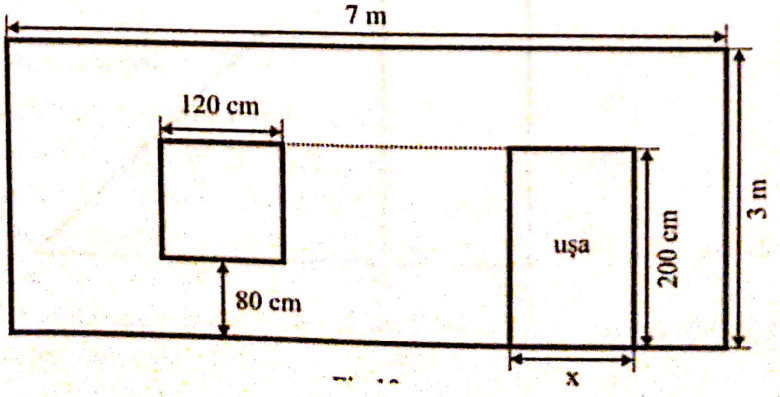
Subiectul III (30 de puncte)

1. În figura alăturată este ilustrat schematic un perete din camera lui Paul pe care acesta vrea să-l zugrăvească ținând cont de dimensiunile de pe desen. Fereastra și ușa sunt dreptunghiuri.

(5p) *a)* Exprimați în funcție de x aria porțiunii care trebuie zugrăvită.

(5p) *b)* Determinați valoarea lui x, știind că suprafața ușii este de 1,8 m^2.

(5p) *c)* Considerăm $x=0,9$ m. Dacă 1 litru de vopsea lavabilă acoperă 5 m^2, aflați cantitatea de vopsea care trebuie cumpărată.



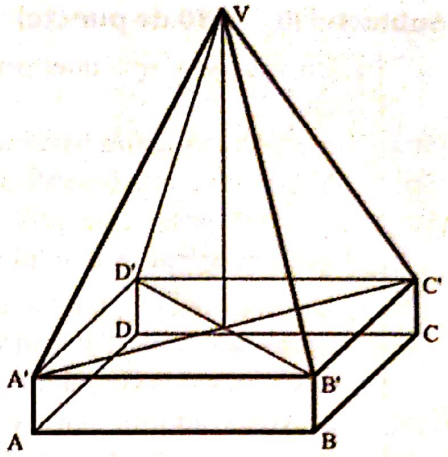
Scanned with OKEN Scanner

2. Figura următoare reprezintă o prăjitură, unde $ABCDA'B'C'D'$ reprezintă blatul prăjiturii, iar piramida $VA'B'C'D'$ este din ciocolată. Se ştie că $AA' = 5$ cm, $AB = BC = 8$ cm şi înălţimea prăjiturii este de 11 cm.

(5p) *a)* Calculaţi volumul prăjiturii.

(5p) *b)* Calculaţi aria laterală a porţiunii din ciocolată.

(5p) *c)* Ştiind că prăjitura cântăreşte 200 g, iar 1 kg de prăjitură din acelaşi sortiment costă 30 lei, aflaţi cât costă bucata de prăjitură.



Testul 8

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-9:3+2^2$ este ... .

(5p) **2.** Scrisă sub formă de interval, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $3x-6 \geq 0$ este ... .

(5p) **3.** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 15. Probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu număr prim este ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral cu perimetrul de 24 cm are latura de ... cm.

(5p) **5.** Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 10 cm, 8 cm şi 6 cm are diagonala egală cu ... cm.

(5p) **6.** Notele obţinute la teză la matematică de către elevii unei clase sunt redate în tabelul următor:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	6	8	4	3	2

Media clasei la teză este egală cu ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

(5p) **2.** Numerele raţionale a, b şi c sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi 4. Ştiind că $6a^2+b^2-2c^2=9$, determinaţi numerele a, b, c.

3. Răspunzând la toate cele 30 întrebări ale unui test, un elev a obţinut 102 puncte. Pentru un răspuns corect s-au acordat 5 puncte, iar pentru unul greşit s-au scăzut 3 puncte.

(5p) *a)* Câte răspunsuri corecte a dat elevul?

(5p) *b)* Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care ar trebui să le dea elevul pentru a depăşi 130 puncte?

(5p) **4.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

a) Aflaţi numărul real m pentru care punctul $A(2m, m^2+3)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $f(x+1)-3f(x)=2[f(2x-1)-1]$.

(5p) **5.** Arătaţi că numărul $a=3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2013}$ este divizibil cu 13. ■

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

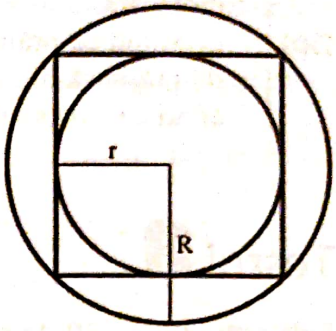
1. Un vas are forma unei prisme patrulatere regulate cu înălțimea de 12 cm și $V = 432$ cm^3.

(5p) *a)* Calculați latura bazei prismei.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a vasului.

(5p) *c)* Dacă vasul este plin cu apă și se golește 25% din capacitatea sa, aflați la ce înălțime se ridică nivelul apei rămase.

2. Decorul unei plăci de ceramică este reprezentat în figura alăturată. Pătratul este înscris în cercul de rază R, circumscris cercului de rază r și are latura de 6 cm.



(5p) *a)* Aflați raportul numerelor r și R.

(5p) *b)* Aflați raportul dintre perimetrul pătratului și lungimea cercului de rază r.

(5p) *c)* Determinați aria porțiunii cuprinse între pătrat și cercul de rază r.

Testul 9

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $714 : 7 - 3$ este egal cu.....

(5p) **2.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$. Scrisă sub formă de interval, mulțimea A este egală cu.....

(5p) **3.** 15% din 300 m reprezintă..... m.

(5p) **4.** Dintre numerele $-4,3$ și $-4,33$ mai mare este numărul.....

(5p) **5.** Diagonala unui cub cu muchia de 5 cm, are lungimea de..... cm.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos este prezentată situația notelor obținute de elevii unei școli la testul de matematică.

Note	1-4,99	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	3	12	20	26	24	22	2

Numărul elevilor care au susținut testul de matematică este de..... elevi.

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un tetraedru $ABCD$.

(5p) **2.** Suma a trei numere este egală cu 111. Unul dintre numere este egal cu media aritmetică a celorlalte două numere. Determinați suma celor două numere.

(5p) **3.** Un grup de copii au primit un număr de banane. Unul dintre copii a primit 3 banane, iar ceilalți copii au primit fiecare câte 5 banane. Dacă fiecare copil ar fi primit câte 4 banane, ar fi rămas 11 banane.

(5p) *a)* Câți copii sunt în grup?

(5p) *b)* Câte banane au primit în total copiii?

(5p) **4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

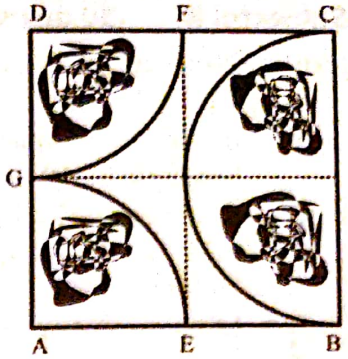
Arătați că numărul $A = 2012 + 2 \cdot [f(0) + f(1) + ... + f(2010)]$ este pătrat perfect.

(5p) **5.** Dintr-un număr scădem 35. Rezultatul obținut se înmulțește cu 2 și se obține 28. Determinați numărul.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Decorul unei plăci de gresie sub formă de pătrat este cel din figura alăturată. Punctele E, F, G sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$ și $[AD]$. Pe un hol lung de 3 m se pun 70 plăci de gresie de forma celei din figură. Se știe că o placă de gresie are latura de 30 cm.

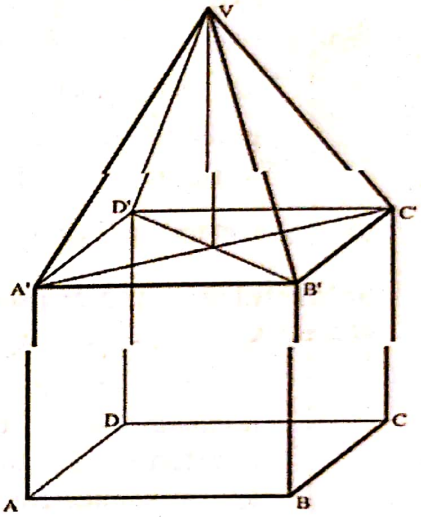


(5p) *a)* Aflați lățimea holului.

(5p) *b)* Aflați aria porțiunii fără model.

(5p) *c)* Calculați suma lungimilor tuturor arcelor de pe o placă de gresie.

2. În figura alăturată este reprezentată schița unui cort. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu muchia de 4 m, iar $VA'B'C'D'$ este o piramidă patrulateră regulată. Înălțimea cortului este de 6 m.



(5p) *a)* Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor cortului.

(5p) *b)* Aflați câți m^2 de pânză au fost necesari pentru confecționarea cortului.

(5p) *c)* Aflați volumul cortului.

Testul 10

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $6:6\cdot 6-6$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\overline{1x7}$ este divizibil cu 9, atunci x este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $x=2$, atunci $-x+1$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Un cerc are diametrul egal cu 18 cm. Lungimea cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Un cub are suma tuturor lungimilor muchiilor egală cu 72 cm. Volumul cubului este de ... cm^3.

(5p) **6.** Graficul următor reprezintă numărul de kilometri parcurşi de un grup de turişti, pe parcursul a 7 zile. Conform graficului, ziua în care s-au parcurs cei mai puțini km este cea cu numărul ... .

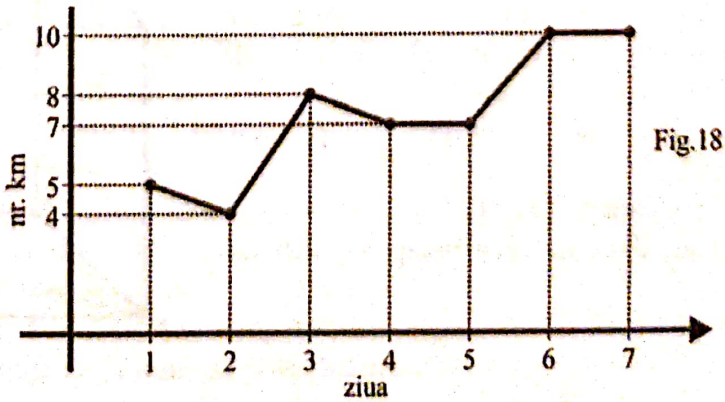


Fig.18

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $VABCD$.

2. Un kg de mere costă 3 lei, iar un kg de piersici costă 4,5 lei.

(5p) *a)* Andrei cumpără 2 kg mere și 3 kg piersici. Ce rest primește dacă el plătește cu 2 bancnote de 10 lei?

(5p) *b)* Paul are 24 lei și vrea să cumpere 6 kg fructe (mere și piersici). Câte kilograme de mere și câte kilograme de piersici trebuie să cumpere astfel încât să plătească exact 24 lei?

(5p) **3.** Mama și fiul au împreună 40 ani.

a) Ce vârstă are fiecare dacă mama este de trei ori mai în vârstă decât fiul?

b) Peste câți ani vârsta fiului va fi egală cu jumătate din vârsta mamei?

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

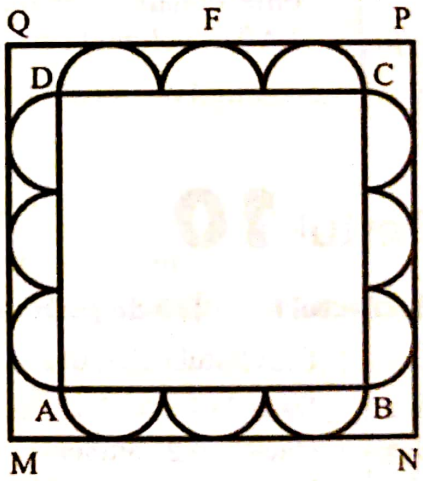
a) Determinați funcția știind că $f(2012)=2011$ și punctul $A(0;-1)$ aparține graficului funcției f.

b) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$, reprezentați grafic funcția f.

(5p) **5.** Demonstrați că $x^2+10x+4y^2-20y+50\geq 0$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Maria confecționează o față de masă sub forma pătratului $MNPQ$, ca în figura următoare. $ABCD$ este un pătrat din pânză, iar în exteriorul acestuia este dantelă pe care s-au aplicat semicercuri din șnur roșu. Pe fiecare latură a pătratului $ABCD$ (din pânză) s-au aplicat trei semicercuri cu raza de 15 cm.

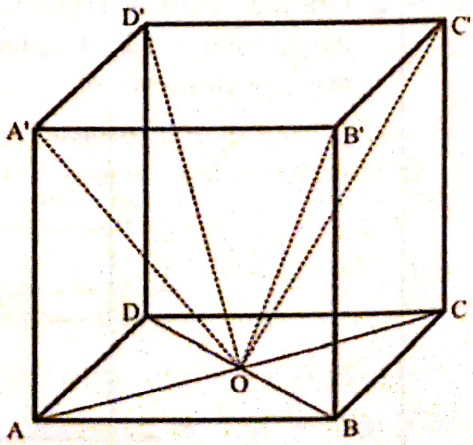


(5p) *a)* Aflați lungimea laturii feței de masă.

(5p) *b)* Aflați câți metri de șnur s-au folosit. (Se ia în calcul $\pi=3{,}14$ și rotunjiți rezultatul la zecime).

(5p) *c)* Știind că un metru pătrat de pânză costă 10 lei, un metru pătrat de dantelă costă 18 lei și un metru liniar de șnur costă 4 lei, calculați cât au costat materialele pentru confecționarea feței de masă. (Se cumpără număr întreg de metri de șnur).

2. Figura alăturată reprezintă o vază obținută dintr-o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ din care s-a scos piramida patrulateră regulată $OA'B'C'D'$. Se știe că $AB=2$ dm și $AA'=3$ dm.



(5p) *a)* Calculați aria totală a prismei $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) *b)* Aflați distanța de la A' la BD.

(5p) *c)* Verificați dacă în vază încap 3,8 litri de apă.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 11

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului 3^2+3^3 este ... .

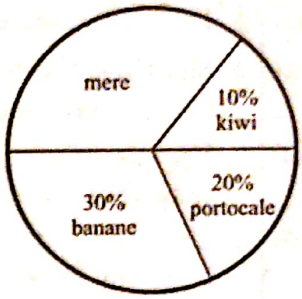
(5p) **2.** A şasea zecimală a numărului 2,(123) este ... .

(5p) **3.** 36% din 50 este egal cu ... .

(5p) **4.** Complementul unghiului cu măsura de 83° este unghiul cu măsura de ...°.

(5p) **5.** Aria laterală a unei prisme triunghiulare regulate ce are latura bazei de 6 cm şi înălţimea de 3 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** Într-un depozit de fructe s-a adus marfă, în total 20 tone. Conform diagramei alăturate, în depozit s-au adus ... tone de mere.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un cub $ABCDMNPQ$.

(5p) **2.** Un elev a citit 60% dintr-o carte, adică 120 pagini. Câte pagini are cartea?

(5p) **3.** Media geometrică a două numere este 15. Ştiind că unul dintre numere este 9, aflaţi celălalt număr.

(5p) **4.** Arătaţi că $\frac{4x^2-9}{2x^2-x-3}=\frac{2x+3}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1,5\}$.

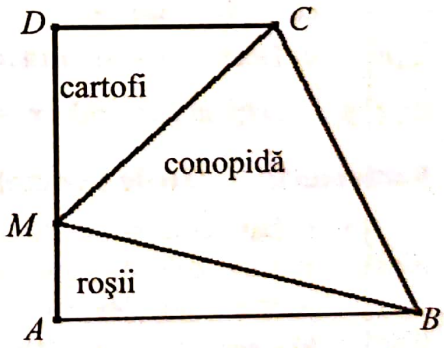
5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{4}\cdot x-1$.

(5p) *a)* Calculaţi $f(-4)\cdot f(4)$.

(5p) *b)* Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În figura următoare este reprezentată schematic grădina lui Mihai, care este împărţită în trei parcele. Pe parcela MDC a cultivat cartofi, pe parcela MAB roşii, iar pe parcela MBC conopidă. Se ştie că $AB=12$ dam, $DC=6$ dam, $AD=9$ dam, $DM=x$, unde x este o distanţă exprimată în decametri.



(5p) *a)* Aflaţi, în funcţie de x, aria parcelei DMC.

(5p) *b)* Aflaţi x, ştiind că aria parcelei DMC este egală cu aria parcelei BMA.

(5p) *c)* Se consideră $x=6$ dam. Ştiind că Mihai recoltează de pe 1 ar de teren în medie 10 kg roşii, 20 kg cartofi şi 18 kg conopidă, iar preţul pentru 1 kg de roşii este 5 lei, pentru 1 kg de cartofi 2 lei şi pentru 1 kg de conopidă 3,5 lei, aflaţi ce sumă încasează din vânzarea legumelor din grădina $ABCD$.

2. Un recipient are forma unei prisme triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$. Se ştie că $AB=30$ cm şi $AA'=15$ cm.

(5p) *a)* Calculaţi volumul prismei.

(5p) *b)* Stabiliţi dacă în recipient încap 10 litri de apă.

(5p) *c)* Aflaţi distanţa de la punctul A' la dreapta BC.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 12

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(-1)^5+(-1)^4$ este ... .

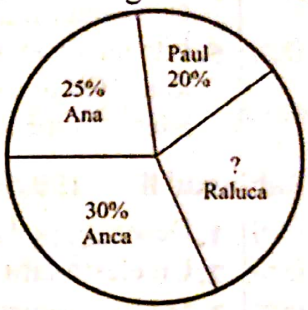
(5p) **2.** Dintre numerele $\frac{5}{3}$ şi $\frac{5}{4}$, este mai mare numărul ... .

(5p) **3.** Dacă $\overline{53x}$ este divizibil cu 2, cea mai mare valoare a lui x este ... .

(5p) **4.** Un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 120°. Celelalte două unghiuri vor avea fiecare măsura egală cu ... °.

(5p) **5.** Un tetraedru regulat are muchia de 6 cm. Aria totală a tetraedrului este de ... cm^2.

(5p) **6.** Un pachet de bomboane a fost împărţit la patru copii conform diagramei următoare. Cât la sută din numărul total de bomboane a primit Raluca?



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Un elev pregăteşte lecţiile de la ora 15^{20} până la ora 19^{10}. Cât timp durează pregătirea lecţiilor ştiind că în acest interval orar elevul face o pauză de 50 minute?

(5p) **3.** Un pescar a prins un peşte. Coada are 1,5 kg, capul cântăreşte cât coada şi jumătate din trunchi, iar trunchiul cât capul şi coada la un loc. Cât cântăreşte peştele?

4. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-3x$.

(5p) *a)* Determinaţi coordonatele punctului de pe graficul funcţiei care are ordonata egală cu triplul abscisei.

(5p) *b)* Determinaţi sinusul unghiului format de graficul funcţiei f şi axa absciselor.

(5p) **5.** Arătaţi că numărul $(x^2+5x)(x^2+5x+2)+1$ este pătrat perfect, pentru orice $x\in\mathbb{N}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. În faţa şcolii noastre este o alee lungă de 20 m.

(5p) *a)* Câte dale de beton, de formă pătrată cu latura de 0,4 m sunt necesare pentru a pava această alee, dacă dalele se vor aşeza pe trei rânduri?

(5p) *b)* Care este lăţimea aleii?

(5p) *c)* Ştiind că 1 m^2 de pavaj costă 42 lei, determinaţi cât costă pavajul folosit.

2. O echipă de muncitori sapă o groapă în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=5$ m, $BC=4$ m şi $AA'=2,5$ m.

(5p) *a)* Aflaţi volumul pământului scos din groapă.

(5p) *b)* Dacă pământul scos este aşezat peste un teren dreptunghiular cu dimensiunile de 0,4 hm şi 2,5 dam, aflaţi cu câţi cm se va înălţa nivelul pământului pe acest teren.

(5p) *c)* Câţi metri ar mai trebui săpaţi în adâncime pentru ca volumul gropii să fie de 60 m^3?

Scanned with OKEN Scanner

Testul 13

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9^2-4\cdot 7:2$ este egal cu ... .

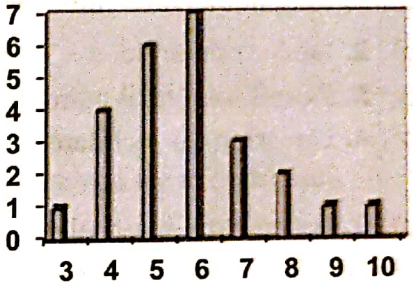
(5p) **2.** Fie mulţimile $A=\{-5,-3,-1,0,4\}$ şi $B=\{-5,-1,0,7\}$. Atunci $A\setminus B=\{...\}$

(5p) **3.** Într-o urnă sunt 23 de bile roşii şi 16 bile negre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie roşie este egală cu ... .

(5p) **4.** Lungimea unui cerc este de 10π cm. Lungimea diametrului cercului este de ... cm.

(5p) **5.** Aria totală a unei prisme triunghiulare regulate este egală cu $144+16\sqrt{3}$ cm^2, iar aria ei laterală este egală cu 144 cm^2. Muchia bazei acestei prisme este de ... cm.

(5p) **6.** Cei 25 de elevi ai unei clase au obţinut la un teste de evaluare următoarele rezultate reprezentate în graficul alăturat. Pe axa verticală este reprezentat numărul de elevi, iar pe axa orizontală nota la test. Conform graficului, au obţinut note foarte bune (8, 9 sau 10) un număr de ... elevi.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen o piramidă regulată de vârf V şi bază $ABCD$.

(5p) **2.** Într-o ladă sunt 225 de mere, iar în alta sunt de tei ori mai multe. În total, în cele două lăzi sunt ..... mere.

3. O subunitate militară a fost aşezată în rânduri de câte patru militari, altă dată în rânduri de câte cinci militari, iar dacă sunt aşezaţi câte şase militari pe rând, de fiecare dată rămân câte trei militari care nu formează un rând complet.

(5p) *a)* Verificaţi dacă pot fi 123 de militari în subunitate.

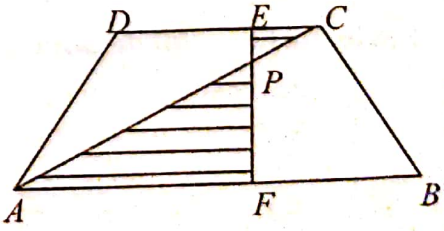
(5p) *b)* Care este numărul minim de militari din subunitate?

(5p) **4.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Aflaţi a şi b ştiind că punctele $A(-1,0)$ şi $B(1,4)$ se găsesc pe graficul funcţiei f.

(5p) **5.** Arătaţi că $\dfrac{2x+6}{x^2+4x+3}=\dfrac{2}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O curte are forma unui trapez isoscel $ABCD$, cu $AB=10$ dam, $DC=6$ dam, $BC=2\sqrt{5}$ dam. Se ştie că $DC=3EC$, $EF\perp AB$ şi $AC\cap EF=\{P\}$ (vezi figura alăturată).



(5p) *a)* Calculaţi aria curţii.

(5p) *b)* Proprietarul vrea să împrejmuiască cu gard de sârmă această curte. Câţi metri liniari de sârmă trebuie să cumpere? Aproximaţi rezultatul prin adaos la un număr natural.

(5p) *c)* Calculaţi lungimea segmentului $[AF]$.

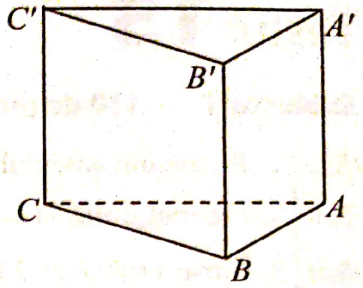
(5p) *d)* Porţiunea haşurată este plantată cu pomi. Aflaţi aria porţiunii plantată cu pomi.

Scanned with OKEN Scanner

2. În figura alăturată, $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată şi $AB = AA' = 2\sqrt{3}$ m.

(5p) *a)* Calculaţi aria totală a acestei prisme;

(5p) *b)* Dacă interiorul unui vas are forma şi dimensiunile prismei date, câţi litri de apă încap în vas?



Testul 14

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $169:13-9$ este egal cu ...

(5p) **2.** Dintre numerele $a = 3\sqrt{2}$ şi $b = 2\sqrt{3}$, mai mare este numărul ...

(5p) **3.** Restul împărţirii numărului 734 la 8 este ....

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are perimetrul egal cu 36 cm. Latura triunghiului are lungimea egală cu ...

(5p) **5.** Un cub are diagonala egală cu $9\sqrt{3}$ cm. Diagonala unei feţe este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Într-un sertar sunt trei perechi de ciorapi: una albă, una roşie şi una neagră. Numărul minim de ciorapi pe care trebuie să îi scoată cineva (pe întuneric) pentru a fi sigur că a scos cel puţin o pereche este de ... ciorapi.

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen o piramidă patrulateră regulată de vârf V şi bază $ABCD$.

(5p) **2.** Un elev a citit într-o zi 70% dintr-o carte care are 240 de pagini. Câte pagini mai are de citit elevul?

3. Fiecare dintre cei 320 de elevi ai unei şcoli cunoaşte cel puţin una din limbile franceză şi engleză. 164 elevi cunosc limba franceză şi 240 cunosc limba engleză.

(5p) *a)* Aflaţi numărul elevilor care cunosc ambele limbi.

(5p) *b)* Aflaţi numărul elevilor care cunosc numai franceza.

(5p) **4.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (1-m)x + m + 2n - 4$, unde m şi n sunt numere reale. Aflaţi m şi n ştiind că punctele $A(-1,1)$ şi $B(-2,0)$ aparţin graficului funcţiei f.

(5p) **5.** Arătaţi că $\dfrac{x^2-81}{x^3+18x^2+81x} = \dfrac{x-9}{x(x+9)}$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-9\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Pe o parcelă în formă de pătrat cu perimetrul de 64 m s-au plantat vinete. Se ştie că pe fiecare m^2 de teren sunt 16 fire de vinete şi că de pe fiecare fir se obţin aproximativ 5 kg vinete.

(2p) *a)* Calculaţi aria parcelei;

(3p) *b)* Câte fire de vinete s-au plantat pe întreaga parcelă?

(5p) *c)* Câte kg de vinete s-au recoltat de pe întreaga parcelă?

(5p) *d)* Ştiind că 1 kg de vinete costă 1,5 lei, aflaţi câţi lei a încasat proprietarul dacă a vândut întreaga cantitate de vinete recoltată.

2. O cameră are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4 m. Punctul P

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă un păianjen situat pe peretele $ABB'A'$ la distanța de 1 m față de muchiile AB și BB', iar punctul M reprezintă o muscă situată pe peretele $CDD'C'$ la distanța de 1 m față de muchiile DD' și $D'C'$.

(5p) *a)* Arătați că punctele P, D', M și D sunt coplanare.

(5p) *b)* Calculați lungimea celui mai scurt drum pe care trebuie să meargă păianjenul pentru a ajunge la muscă (păianjenul se poate deplasa doar pe podea, pe pereți și pe tavan).

(5p) *c)* Determinați distanța de la muscă la dreapta BB'.

Testul 15

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9\sqrt{200} : 3\sqrt{10}$ este egal cu ... .

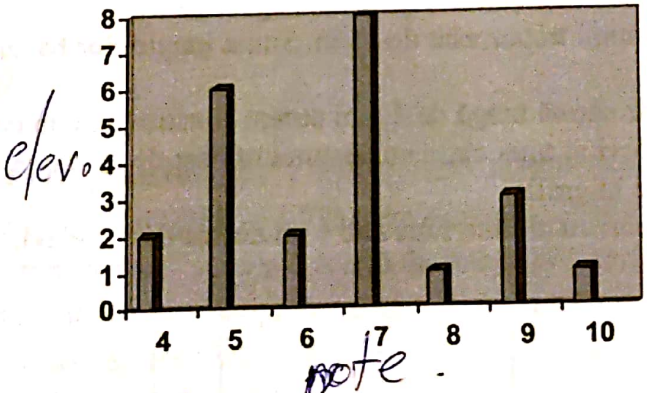
(5p) **2.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ este ... .

(5p) **3.** Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară o față cu un număr de puncte cel puțin egal cu patru este ... .

(5p) **4.** În cercul de rază 10 cm se construiesc razele OA și OB care formează un unghi cu măsura de 60°. Lungimea coardei AB este egală cu ... .

(5p) **5.** Aria unei fețe a unui tetraedru regulat de muchie 6 cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform acestui grafic, media clasei este de ... . (Pe axa verticală este reprezentat numărul de elevi, iar pe axa orizontală nota la test.)



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Pe două rafturi se află 120 de cărți. Pe primul raft sunt de cinci ori mai puține cărți decât pe al doilea. Determinați numărul cărților de pe al doilea raft.

3. Dintr-o lungime de 1 km luăm o doime, din rest luăm o treime, din noul rest luăm o pătrime și așa mai departe.

(5p) *a)* După câte operații de acest tip luăm o lungime strict mai mică decât 1 mm?

(5p) *b)* După câte operații de acest tip rămâne o lungime mai mică de 1 mm?

(5p) **4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$. Aflați punctul care aparține graficului funcției f și are coordonatele egale.

(5p) **5.** Arătați că $\left[\frac{6x-12}{(x-2)^2} - \frac{5x-15}{(x-3)^2}\right] : \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{x-8}{2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

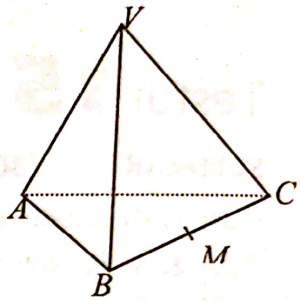
1. Terenul de sport al unei şcoli este în formă de dreptunghi cu perimetrul de 200 m şi lungimea de trei ori mai mare decât lăţimea. Terenul e înconjurat de o pistă cu lăţimea de 2,5 m. Calculaţi:

(5p) *a)* dimensiunile terenului de sport;

(5p) *b)* aria terenului de sport;

(5p) *c)* perimetrul exterior al pistei.

2. În figura alăturată, piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălţimea $VO = 5$ cm, iar înălţimea bazei de trei ori mai mare decât înălţimea piramidei. Fie M mijlocul lui $[BC]$.



(5p) *a)* Transcrieţi pe foaia de examen figura şi completaţi-o cu mediana AM a triunghiului ABC şi înălţimea VO a piramidei.

(5p) *b)* Calculaţi măsura unghiului diedru format de faţa laterală (VBC) cu planul bazei.

(5p) *c)* Calculaţi aria totală a piramidei.

Testul 16

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $144 : 6 - 4$ este egal cu ... .

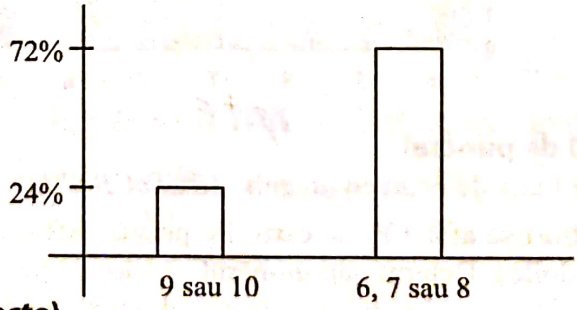
(5p) **2.** Numărul *„două cincimi”* scris sub formă de fracţie zecimală este ... .

(5p) **3.** Media geometrică a numerelor 8 şi 32 este egală cu ... .

(5p) **4.** Linia mijlocie a unui trapez este de 15 m. Suma lungimilor bazelor trapezului este de ... m

(5p) **5.** Dintr-o bucată de sârmă lungă de 2,4 m putem construi un cub cu muchia de ..... m

(5p) **6.** Toţi cei 25 de elevi ai unei clase au susţinut un test de evaluare. Rezultatele obţinute sunt reprezentate în grafic.
Conform graficului au obţinut note sub 6 un număr de .... elevi.



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen o piramidă patrulateră regulată $VABCD$.

(5p) **2.** La o librărie s-au vândut într-o zi 200 de caiete de matematică şi de dictando şi s-a încasat suma de 270 lei. Ştiind că un caiet de matematică costă 1,8 lei, iar unul de dictando costă 1,2 lei, aflaţi câte caiete din fiecare fel s-au vândut.

3. Un cub vopsit în roşu a fost tăiat în 125 de cubuleţe identice cu muchia de 1 cm.

(5p) *a)* Determinaţi lungimea muchiei cubului.

(5p) *b)* Câte dintre cubuleţele mici nu au nicio faţă vopsită? Dar câte au o singură faţă vopsită?

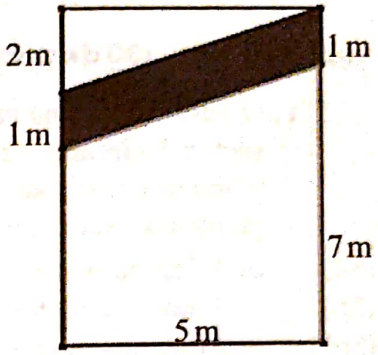
Scanned with OKEN Scanner

(5p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2}-1$. Aflați valoarea funcției f pentru $x=-2\sqrt{2}$.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=(x+3)^2+2(x-4)(x+3)+(x-4)^2$, unde $x\in\mathbb{R}$. Arătați că $E(x)=(2x-1)^2$, pentru orice număr real x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O familie și-a amenajat pardoseala sufrageriei ca în figură.



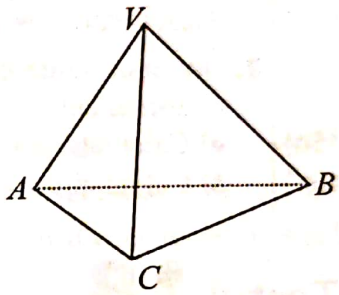
(5p) *a)* Care este aria suprafeței cu gresie albă?

(5p) *b)* Care este aria suprafeței cu gresie gri?

(5p) *c)* Care este aria suprafeței cu gresie neagră?

(5p) *d)* Știind că 1 m^2 de gresie costă 31 lei, aflați cât a costat gresia din sufragerie.

2. În figura următoare, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată ce are apotema bazei $OM = 3$ cm și înălțimea piramidei $VO=3\sqrt{3}$ cm.



(2p) *a)* Transcrieți pe foaia de examen figura și completați-o cu apotema bazei OM și înălțimea VO.

(4p) *b)* Calculați aria laterală a piramidei.

(4p) *c)* Determinați distanța de la vârful piramidei până la un plan paralel cu baza care împarte suprafața laterală în două părți cu aceeași arie.

Testul 17

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2{,}25 - 1{,}715$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numărul „*trei sferturi*” scris sub formă de fracție ordinară este ... .

(5p) **3.** Împărțind un număr la 11 obținem câtul 3 și restul 6. Numărul este egal cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) are $BC = 3$ cm, iar $AB = 2BC$. Atunci perimetrul triunghiului ABC este de ... cm.

(5p) **5.** Un cerc are raza de 6 cm. Aria cercului este egală cu ... .

(5p) **6.** Fie mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\sqrt{24}<x<\sqrt{256}\right\}$. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie prim este ... .

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Mama are 40 de ani, iar fiica 16 ani. Determinați cu câți ani în urmă mama era de 3 ori mai în vârstă decât fiica.

3. Mai multe colete conțin cărți și caiete. Fiecare colet conține caiete și cărți, în total 10 bucăți. Un caiet costă 2,4 lei și o carte costă 9 lei.

(5p) *a)* Ce rest primește o persoană dacă are o bancnotă de 100 lei și cumpără 3 caiete și 3 cărți?

(5p) *b)* Care e prețul minim al unui colet care conține cel puțin 3 caiete și cel puțin 2 cărți?

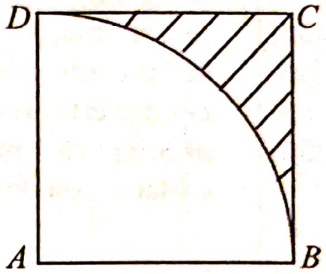
Scanned with OKEN Scanner

(5p) **4.** Se dau funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 4$, $g(x) = \frac{x}{3} + 1$. Aflaţi coordonatele punctului de intersecţie a reprezentărilor grafice ale celor două funcţii.

(5p) **5.** Se dă fracţia $F(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Arătaţi că $F(x) = \frac{x+3}{x-3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O curte are forma unui pătrat $ABCD$ de latură 40 m. Pe sectorul circular de centru A şi rază AB, proprietarul plantează flori, iar în porţiunea rămasă (cea haşurată) plantează gazon. Se consideră $\pi = 3{,}14$.



(5p) *a)* Aflaţi perimetrul şi aria curţii.

(5p) *b)* Aflaţi aria sectorului circular plantat cu flori.

(5p) *c)* Aflaţi aria porţiunii plantată cu gazon.

(5p) *d)* Ştiind că 1 kg de sămânţă de gazon costă 8 lei, aflaţi cât a costat în total sămânţa dacă, pentru fiecare metru pătrat sunt necesare 1,5 kg de sămânţă?

2. Din unul dintre colţurile unui cub din lemn cu latura de 4 cm s-a îndepărtat o bucată de formă cubică având latura de 2 cm.

(5p) *a)* Calculaţi volumul bucăţii îndepărtate.

(5p) *b)* Calculaţi volumul şi aria corpului astfel obţinut.

Testul 18

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Numărul de 15 ori mai mic decât 1260 este ...

(5p) **2.** Fie mulţimea $A = \left\{\frac{6}{3}; -2 : \sqrt{3}; -1{,}0(7); \sqrt{9}; 3{,}5; 1{,}5; -\pi\right\}$. Atunci $A \cap \mathbb{Z} = \{ \ldots \}$.

(5p) **3.** 3,5 litri = ... cm^3.

(5p) **4.** Catetele unui triunghi dreptunghic sunt de 5 cm şi 12 cm. Raza cercului circumscris triunghiului este de ..... cm.

(5p) **5.** Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu AB = 12 cm şi înălţimea VO = 6 cm. Volumul piramidei este de ....

(5p) **6.** Situaţia notelor obţinute de elevii unei clase la un test de evaluare este ilustrată în tabelul alăturat. Media clasei la test este .... .

Nota	10	9	8	7	6	5	4
Nr. elevi	2	3	6	6	5	1	2

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi pe foaia de examen piramida patrulateră regulată $VABCD$.

(5p) **2.** Într-o şcoală sunt 425 de elevi, iar în alta sunt de două ori mai mulţi elevi. Câţi elevi sunt în total în cele două şcoli?

3. Împărţind un număr natural n la numerele 45, 36 şi 54 se obţin câturi nenule şi, de fiecare dată restul 2.

(5p) *a)* Determinaţi cel mai mic număr natural cu această proprietate.

(5p) *b)* Aflaţi toate numerele cu această proprietate astfel încât $1500 < n < 2600$.

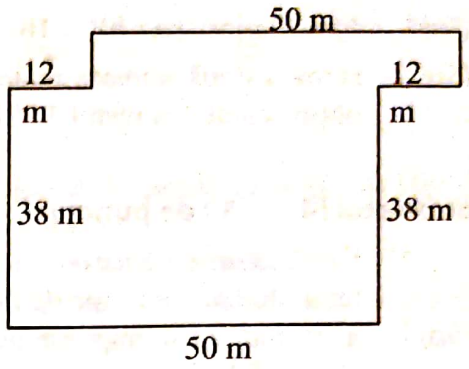
Scanned with OKEN Scanner

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}$. Arătați că punctul $A(1, 2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

(5p) **5.** Arătați că, pentru orice număr real x, are loc: $(x+5)^3-x-5=(x+4)(x+5)(x+6)$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un teren are forma din figura alăturată.



(5p) *a)* Calculați aria și perimetrul terenului.

(5p) *b)* De câte scânduri cu lungimea de 25 cm este nevoie pentru construirea unui gard în jurul acestui teren?

(5p) *c)* Care este volumul acestor scânduri dacă grosimea lor este de 2 cm, iar înălțimea gardului este de 2 m?

(5p) *d)* Care trebuie să fie înălțimea minimă a unei camionete necesare pentru transportul scândurilor dacă spațiul ei de depozitare are lungimea de 4 m și lățimea de 1 m?

2. O cutie de chibrituri cu dimensiunile de 15 mm, 35 mm și 50 mm.

(2p) *a)* Care este probabilitatea ca, aruncând cutia să cadă pe fața cu aria de 5,25 cm^2 ?

(4p) *b)* Dacă volumul unui băț este de 650 mm^3, care este numărul maxim de bețe aflat într-o cutie?

(4p) *c)* Câte zaruri cu muchia de 5 mm pot fi aranjate în cutie (făcând abstracție de grosimea pereților cutiei)?

Testul 19

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2^2\cdot 5:10-2$ este...

(5p) **2.** Valoarea lui x din $3x+6=18$ este ...

(5p) **3.** Media aritmetică a două numere este 40. Unul din numere este 16, iar celălalt număr este ...

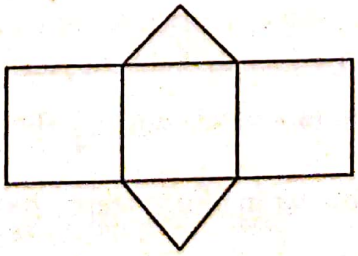
(5p) **4.** Alegând la întâmplare o cifră din numărul 37965, probabilitatea ca aceasta să reprezinte un multiplu de 3 este ...

(5p) **5.** Volumul cubului cu muchia de 5 cm este de ... cm^3.

(5p) **6.** În intervalul $[-5;6)$ sunt ... numere întregi.

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen corpul a cărui desfășurare este în figura de mai jos.



Scanned with OKEN Scanner

(5p) **2.** Un obiect costă 240 lei și se scumpește cu 10%. Aflați noul preț al obiectului.

(5p) **3.** Arătați că $\frac{x^2-2x-15}{x^2+10x+21}=\frac{x-5}{x+7}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-7\}$.

4. Se dau numerele $a=\sqrt{11+4\sqrt{7}}$ și $b=\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

(5p) *a)* Calculați $a\cdot b$

(5p) *b)* Arătați că $(a-b)^2=16$.

(5p) **5.** Suma a două numere reale este 60. Împărțind primul număr la al doilea număr se obține câtul 2 și restul 3. Aflați cele două numere.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Două loturi au aceeași arie. Primul lot este sub formă de pătrat cu latura de 600 m, iar al doilea are formă de dreptunghi cu o latură de 400 m.

(5p) *a)* Primul lot se împrejmuiește cu un gard de sârmă, cu 5 rânduri. Calculați lungimea sârmei folosite.

(5p) *b)* Aflați care este a doua dimensiune a lotului în formă de dreptunghi.

(5p) *c)* Câți lei se încasează pe recolta de grâu de pe al doilea lot dacă producția medie la hectar este de 4000 kg, iar 1 kg de grâu se vinde cu 0,8 lei ?

2. Un vas în formă de cub cu muchia de 12 dm are apă până la înălțimea de 80cm.

(5p) *a)* Calculați câți litri de apă sunt în vas.

(5p) *b)* Calculați aria laterală a vasului.

(5p) *c)* Câți litri de apă sunt necesari pentru a umple vasul ?

Testul 20

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** 30% din 120 este egal cu ... .

(5p) **3.** Dacă $6\cdot(x+2)=42$, atunci numărul real x este egal cu ... .

(5p) **4.** Triunghiul ABC are laturile $AB=AC=65$ cm și $BC=66$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Latura cubului care are diagonala de $9\sqrt{3}$ este egală cu ... .

(5p) **6.** La un test, cei 16 elevi ai clasei au obținut următoarele note: 2 note de 4, 3 note de 6, 5 note de 8, 4 note de 9 și 2 note de 10. Care a fost media clasei la test?

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen o prismă patrulateră regulată.

(5p) **2.** Traseul unei excursii a fost străbătut în patru etape în felul următor: în prima etapă $\frac{2}{7}$ din întregul drum; în a doua etapă, $\frac{1}{4}$ din ce a rămas de parcurs; în etapa a treia, $\frac{1}{3}$ din restul drumului, iar în ultima etapă, 200 km. Ce lungime avea traseul?

Scanned with OKEN Scanner

(5p) **3.** Care este ultima cifră a numărului $\left(330^{1991}+331^{1992}+335^{1993}+336^{1994}\right)$?

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

(5p) *a)* Aflați a și b știind că punctele $A(-1,0)$ și $B(1,4)$ se găsesc pe graficul funcției.

(5p) *b)* Dacă $a=b=2$, reprezentați graficul funcției într-un sistem de coordonate ortogonale.

(5p) **5.** Arătați că $\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x}{1-x}+\frac{4x}{x^2-1}=\frac{2(1-x)}{1+x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Două loturi au aceeași arie. Primul lot este sub formă de pătrat cu latura de 600 m, iar al doilea are formă de dreptunghi cu o latură de 400 m.

(5p) *a)* Aflați care este a doua dimensiune a lotului în formă de dreptunghi.

(5p) *b)* Câți lei se încasează pe recolta de grâu de pe al doilea lot dacă producția medie la hectar este de 4000 kg, iar 1kg de grâu se vinde cu 0,8 lei ?

2. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$. Latura bazei $AB=6\sqrt{6}$ cm, iar apotema piramidei $VM=6\sqrt{3}$ cm.

(5p) *a)* Realizați pe foaia de examen figura și completați-o cu apotema VM a piramidei.

(5p) *b)* Calculați aria laterală și volumul piramidei.

(5p) *c)* Calculați măsura unghiului planelor a două fețe laterale consecutive.

(5p) *d)* Calculați măsura unghiului planelor a două fețe laterale opuse.

Testul 21

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $9^2-4\cdot7:2$ este egal cu ....

(5p) **2.** Împărțind un număr la 11 obținem câtul 3 și restul 6. Numărul este egal cu ....

(5p) **3.** Dacă $\frac{x}{4}=\frac{5}{0,2}$, atunci numărul real x este egal cu....

(5p) **4.** Triunghiul echilateral ABC are perimetrul egal cu 36 cm. Aria sa este ... cm^2.

(5p) **5.** Volumul cubului care are diagonala unei fețe de $5\sqrt{2}$ cm este de .... cm^3.

(5p) **6.** Numărul elevilor din lotul de atletism și vârsta lor sunt reprezentate în tabel.

Vârsta	12	13	14	15
Număr elevi	3	2	4	5

Numărul elevilor din lot este egal cu ....

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen o prismă triunghiulară regulată.

(5p) **2.** Numerele naturale a și b sunt direct proporționale cu 11, respectiv 4. Aflați a și b știind că împărțind numărul a la numărul b obținem câtul 2 și restul 30.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-m)x+m+2n-4$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

(5p) *a)* Aflați m și n știind că punctele $A(-1,1)$ și $B(-2,0)$ se află pe graficul f.

(5p) *b)* Pentru $m=0$ și $n=3$, reprezentați grafic funcția.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) **4.** După ce în prima zi a cheltuit o treime din suma pe care o avea, iar în a doua zi 150 lei, unui elev i-a rămas 25% din suma inițială. Ce sumă a avut inițial elevul?

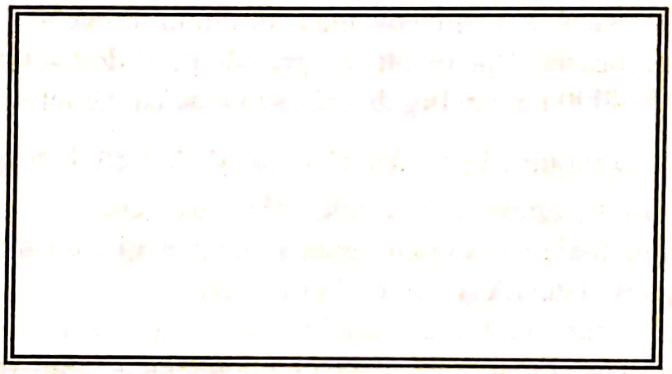
(5p) **5.** Arătați că $x-\left(\frac{1}{x-3}+\frac{7-x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}\right):\frac{x+2}{2(x-1)}=x+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O grădină are forma unui dreptunghi cu dimensiunile (exprimate în dam) egale cu cele mai mici două numere prime. Se împrejmuiește grădina cu cinci rânduri de gard de sârmă.

(5p) *a)* Aflați lungimea sârmei care trebuie cumpărată.

(5p) *b)* Cât costă gazonul necesar pentru întreaga grădină, știind că un kilogram costă 12,5 lei, iar pentru un metru pătrat de teren este nevoie de 120 grame de gazon.



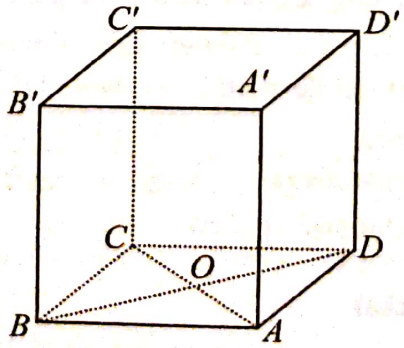
2. În figura următoare este reprezentată o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=8$ cm și AA' este egal cu trei pătrimi din AB. Punctul O este centrul pătratului $ABCD$.

(5p) *a)* Completați pe foaia de examen desenul din figură cu diagonalele fetei $ADD'A'$.

(5p) *b)* Calculați aria totală și volumul prismei.

(5p) *c)* Calculați distanța de la punctul B' la dreapta AD'.

(5p) *d)* Determinați distanța de la O la planul $(DA'C)$.



Scanned with OKEN Scanner

Testul 22

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $169:13-9$ este egal cu ....

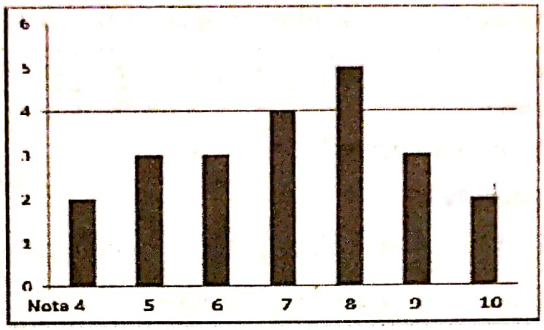
(5p) **2.** Dacă $x^2-9=(x+a)(x+b)$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$, atunci produsul $a\cdot b$ este egal cu ... .

(5p) **3.** O persoană a cumpărat într-o zi 4,7 m de stofă, iar în a doua zi cu 1,3 m mai mult. În cele două zile a cumpărat ... m de stofă.

(5p) **4.** Dreptunghiul $ABCD$ are lățimea $BC=6$ cm și diagonala $AC=10$ cm. Lungimea AB a dreptunghiului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Înălțimea unui cub este de 7 cm. Aria sa totală este de ... cm^2.

(5p) **6.** La testul de matematică, elevii clasei a VIII-a B au obținut următoarele rezultate:



Numărul elevilor din clasa a VIII-a B este egal cu ....

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen un tetraedru regulat.

(5p) **2.** Arătați că numărul $1997+2\cdot(1+2+\ldots+1996)$ este pătrat perfect.

3. Fie funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele egale.

(5p) **4.** Aflați numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, pentru care $\overline{ab}=5a+3b$.

(5p) **5.** Arătați că $\left[\dfrac{6x-12}{(x-2)^2}-\dfrac{5x-15}{(x-3)^2}\right]:\dfrac{2}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-8}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O grădină de forma unui triunghi echilateral este împărțită în șase *sectoare* distincte de către cele trei înălțimi ale triunghiului, fiecare fiind plantată cu alt tip de legume.

Știind că aria unui astfel de *sector* este de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ dam^2, calculați:

(5p) *a)* aria totală a grădinii;

(5p) *b)* lungimea gardului exterior pe care proprietarul grădinii îl va cumpăra.

2. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are muchia $VA=12\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO=18$ cm.

(5p) *a)* Desenați pe foaia de examen piramida și completați desenul cu înălțimea VO.

(5p) *b)* Aflați aria laterală și volumul piramidei.

(5p) *c)* Aflați distanța de la centrul bazei O la o față laterală, precum și distanța de la un vârf al bazei la o față laterală a piramidei.

(5p) *d)* Aflați măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 23

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $116:29+17-9$ este egal cu .....

(5p) **2.** Un elev a citit într-o zi 70% dintr-o carte care are 240 de pagini. El mai are de citit un număr de ... pagini.

(5p) **3.** Dintre numerele $5\sqrt{3}$ și $3\sqrt{5}$, mai mare este .....

(5p) **4.** ABC este un triunghi dreptunghic având cateta $AB = 8$ cm, iar cateta AC este cu 2 cm mai mică decât AB. Lungimea ipotenuzei triunghiului este de ... cm.

(5p) **5.** Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 3 cm, 4 cm și, respectiv 12 cm. Diagonala sa este de ... cm.

(5p) **6.** Rezultatele la testarea inițială la clasa a opta au fost cele din tabel:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	3	5	4	3	2

Câți elevi au obținut note peste 5?

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen piramida triunghiulară regulată $VABC$.

(5p) **2.** Determinați rădăcina pătrată a soluției ecuației $(2x-3)\cdot|8-\sqrt{65}|=5(\sqrt{65}-8)$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(1,2)$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic punctele A și B.

(5p) *b)* Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, a cărei reprezentare grafică este dreapta AB.

(5p) **4.** Într-un oraș sunt în prezent 484 000 de locuitori. Populația acestui oraș a crescut în fiecare din ultimii doi ani cu 10%. Câți locuitori erau în oraș acum doi ani ?

(5p) **5.** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}\right):\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right),\ \text{unde } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1,2\}.$$

Subiectul III (30 de puncte)

1. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu catetele de 6 și, respectiv 8 m. Se notează cu D mijlocul ipotenuzei. Costel pleacă din B pe traseul $B-D-A$, iar Gabi pleacă din C pe traseul $C-D-A$.

(5p) *a)* Comparați lungimile celor două trasee.

(5p) *b)* Determinați ariile celor două triunghiuri cu interioarele disjuncte formate în interiorul triunghiului ABC.

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Diferența dintre pătratul diagonalei bazei și dublul pătratului înălțimii este 25 cm^2, iar perimetrul bazei este de 26 cm. Înălțimea este medie proporțională între dimensiunile bazei.

(5p) *a)* Desenați pe foaia de examen paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ și completați desenul cu diagonalele bazei $ABCD$ care se intersectează în punctul O.

(5p) *b)* Calculați dimensiunile paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) *c)* Calculați sinusul unghiului dintre planele $(A'OD')$ și $(B'OC')$.

(5p) *d)* Calculați numărul maxim de paralelipipede dreptunghice de dimensiuni egale cu 2 cm, 3 cm, respectiv 2 cm, în care poate fi descompus paralelipipedul dat.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 24

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(130-5\cdot 19):5$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dintre cei 320 de elevi ai unei şcoli, 40% sunt în învăţământul primar. Numărul elevilor care sunt în învăţământul primar este egal cu ....

(5p) **3.** Dacă $\frac{3}{x}=\frac{5}{4}$, atunci numărul real x este egal cu ....

(5p) **4.** Triunghiul ABC este isoscel, cu $AB=AC$. Măsura unghiului BAC este de 70°. Atunci $m(\sphericalangle ABC)$ este egală cu ...°.

(5p) **5.** $ABCDA'B'C'D'$ este un cub în care $AB'=5\sqrt{2}$ cm. Lungimea diagonalei cubului este egală cu ... cm

(5p) **6.** Într-o urnă sunt 29 bile albe şi 21 bile negre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este egală cu .....

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi prisma triunghiulară regulată $MNPQRS$.

(5p) **2.** Determinaţi patru numere naturale ştiind că primul este o cincime din al doilea, al doilea este o treime din al treilea, al treilea este o doime din al patrulea, iar al patrulea este cu 29 mai mare decât primul.

(5p) **3.** Fie mulţimea $A=\left\{3,-\sqrt{2},0,-5,\sqrt{3},\pi,\sqrt{4},\frac{5}{3}\right\}$. Determinaţi $A\cap\mathbb{Z}$ şi apoi $A\cap\mathbb{Q}$.

4. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+4$, $g(x)=\frac{x}{3}+1$.

(5p) *a)* Aflaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

(5p) *b)* Rezolvaţi ecuaţia $3f(x)+g(4x-1)=8$.

(5p) **5.** Arătaţi că $E(x)=\left(\frac{x}{x-2}-\frac{1}{4-x^2}+\frac{3x}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{x^2+4x+4}{4x^2-1}\right)\cdot\frac{2x+1}{x+2}=\frac{2x-1}{x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2,2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O grădină de forma unui pătrat cu latura de 10 m are în interiorul său un pătrat cu vârfurile în mijloacele laturilor grădinii. Pătratul din interior se acoperă cu pavele de ciment.

(5p) *a)* Aflaţi cât ciment trebuie să se cumpere dacă la 1 m^2 intră 4 kg de ciment.

(5p) *b)* Pe restul suprafeţei se plantează gazon. La 1 m^2 sunt necesare 250 de grame de gazon. Cât costă gazonul ce trebuie cumpărat dacă un kilogram costă 12,5 lei?

2. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Ştim că $AB=6$ cm, $BC=12$ cm şi $MD'=12$ cm, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$.

(5p) *a)* Desenaţi paralelipipedul şi completaţi cu triunghiul AMD'.

(5p) *b)* Calculaţi volumul paralelipipedului dreptunghic.

(5p) *c)* Calculaţi măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (AMD').

(5p) *d)* Calculaţi distanţa de la punctul C la planul (AMD').

Scanned with OKEN Scanner

Testul 25

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $7-5\cdot 2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă $\frac{4}{5}=\frac{n}{10}$, atunci valoarea numărului natural n este egală cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le x<6\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Dacă diametrul unui cerc este egal cu 12 cm, atunci lungimea cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din Figura 1 are toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VB și AD este egală cu ... °.

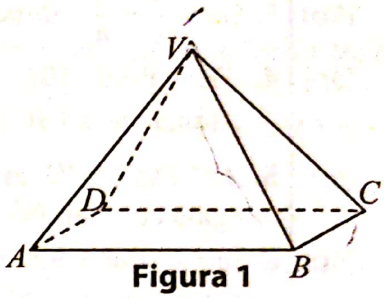


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obținut note cel puțin egale cu 7 este ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC și vârf V.

(5p) **2.** Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, $b\neq 0$, știind că acesta împărțit la b dă câtul 3 și restul a.

(5p) **3.** Un biciclist a parcurs un traseu în 3 zile. În prima zi a parcurs 30% din traseu, iar în a doua zi $\frac{1}{2}$ din cât mai avea de parcurs. Dacă biciclistul mai are de parcurs în a treia zi 14 km din traseu, atunci determinați lungimea drumului.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(2m,-7)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Dacă $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{x+a}{x+b}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, arătați că $a+b$ este număr întreg.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un stup în formă de cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei de 20 cm conține 2 litri de miere.

(5p) *a)* Calculați câți litri de miere încap în vas.

(5p) *b)* Calculați înălțimea la care se ridică mierea în cub.

(5p) *c)* O albină pleacă din punctul A, intersectează muchia BB' într-un punct M și ajunge, pe drumul cel mai scurt, în punctul C'. Albina se deplasează pe fețele laterale ale stupului. Determinați lungimea segmentului $[BM]$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Figura 2 reprezintă schiţa unui teren format din patru pătrate, fiecare pătrat având latura de 2 dam. Terenul este străbătut de aleile AB, BC şi CA. În interiorul triunghiului ABC sunt flori, iar pe restul terenului gazon.

(5p) *a)* Calculaţi aria suprafeţei acoperită cu gazon.

(5p) *b)* Verificaţi dacă aria suprafeţei cu flori este mai mare decât aria suprafeţei cu gazon.

(5p) *c)* Arătaţi că perimetrul triunghiului ABC este mai mic de 12 dam.

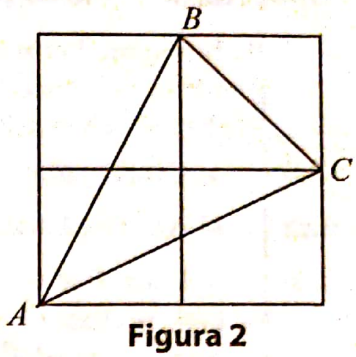


Figura 2

Testul 26

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $5\cdot 3-17$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{0,1,2,3,4\}$, acesta să fie pătrat perfect este egală cu ... .

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulţimea $A=\{x \mid x<3,\ x\in\mathbb{R}\}$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Un triunghi echilateral are o linie mijlocie de 4 cm. Perimetrul triunghiului echilateral este egal cu ... cm.

(5p) **5.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din Figura 1 are toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VA şi VC este egală cu ... °.

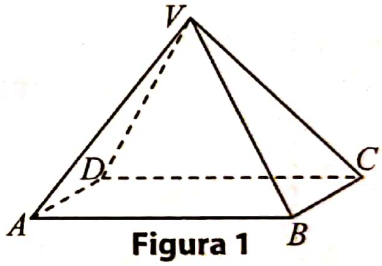


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obţinute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obţinut note divizibile cu 3 este egal cu ... .

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDMPSQ$.

(5p) **2.** Determinaţi numărul natural de forma $\overline{ab}$, scris în baza 10, ştiind că $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{2}{9}$.

(5p) **3.** Mama este cu 24 de ani mai mare decât fiul său. Peste 7 ani, vârsta mamei va fi de 4 ori mai mare decât vârsta fiului. Determinaţi vârsta mamei şi vârsta fiului.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-3x$.

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia considerată.

(5p) *b)* Determinaţi numărul real p pentru care punctul $A(p,4)$ este situat pe graficul funcţiei f.

(5p) **5.** Arătaţi că $\left(\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x^2-4}\right):\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}+1\right)=\frac{7}{2x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. În Figura 2 este ilustrată schița unui teren, unde $ABCD$ este un pătrat cu latura 12 dam, iar $BEFM$ un dreptunghi cu $BE = 16$ dam și $MB = x$ dam, unde $0 < x < 12$.

(5p) *a)* Exprimați în funcție de x lungimea segmentului CF.

(5p) *b)* Arătați că aria terenului este egală cu $16(9+x)$ dam^2.

(5p) *c)* Dacă $BM = 8$ dam și terenul este cultivat cu grâu, determinați cantitatea recoltată de pe întreg terenul, știind că de pe un hectar se recoltează 2,8 tone grâu.

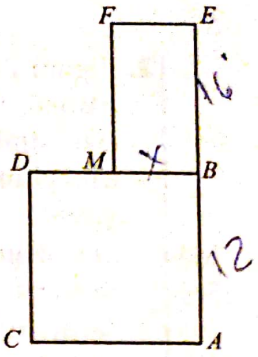


Figura 2

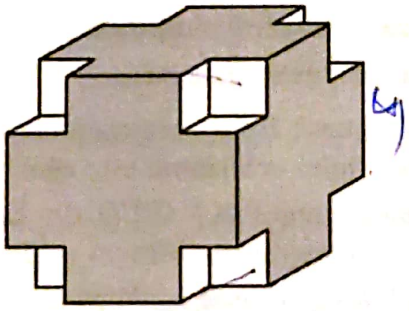
2. În Figura 3 este reprezentat un cub cu lungimea muchiei de 8 cm din care la fiecare vârf s-a decupat câte un cub cu muchia de 2 cm.

(5p) *a)* Calculați aria totală a corpului obținut.

(5p) *b)* Demonstrați că după decuparea cuburilor din fiecare vârf al cubului dat, volumul corpului este egal cu 87,5% din volumul inițial al cubului mare.

(5p) *c)* Dintr-un cub cu muchia de 8 cm se decupează din fiecare vârf câte un cub cu muchia de x cm. Arătați că nu există un număr natural x, astfel încât volumul corpului rezultat după decupare să fie jumătate din volumul cubului inițial.

Figura 3



Testul 27

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $124 : 4 - 17$ este egal cu ....

(5p) **2.** Numerele naturale din intervalul $(2;5]$ sunt în număr de ....

(5p) **3.** Media aritmetică a numerelor $a = 3\sqrt{2}$ și $b = 5\sqrt{2}$ este egală cu ....

(5p) **4.** Suma lungimilor liniilor mijlocii ale unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm este egală cu .... cm.

(5p) **5.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are toate fețele laterale triunghiuri echilaterale. Măsura unghiului dintre dreptele VB și AC este egală cu ....°.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Probabilitatea ca alegând o lucrare a unui elev din clasă, aceasta să fie evaluată cu o notă mai mare decât 6 este egală cu ....

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Arătați că $(\sqrt{2}-2)^2-(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$.

(5p) **3.** Diferența a două numere naturale este 18. Dacă împărțim numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 3 și restul 2. Determinați cele două numere.

4. Se consideră funcția $f:\{1;2;3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,-2)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\dfrac{2x^2-7x-17}{x^2-10x+21}-\dfrac{x+1}{x-7}\right):\dfrac{1}{x^2-9}=(x+2)(x+3)$, pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3;7\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

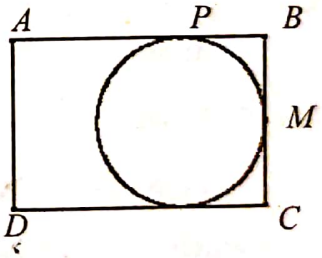
1. O furnică se deplasează pe apotema (VM) a unui obiect în formă de piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$, punctul M fiind mijlocul laturii (BC). Se știe că $VA=6$ cm și înălțimea piramidei este de $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$ cm.

(5p) *a)* Calculați volumul piramidei.

(5p) *b)* Arătați că apotema piramidei este egală cu latura bazei piramidei.

(5p) *c)* Ajungând în punctul E de pe apotema (VM) a piramidei, furnica se află la cea mai mică distanță AE, față de punctul A. Calculați lungimea segmentului VE.

2. Figura alăturată reprezintă schița unui lac circular, aflat într-o zonă de agrement dreptunghiulară acoperită cu gazon și care este tangent laturilor $[AB]$, $[BC]$ și $[CD]$. Se știe că: $AB=30$ m și $BC=20$ m.



(5p) *a)* Calculați aria suprafeței lacului.

(5p) *b)* Verificați dacă aria suprafeței gazonului este mai mică decât aria suprafeței lacului. ($3,14<\pi<3,15$).

(5p) *c)* Dacă punctele de tangență cu laturile (AB) și (BC) sunt P și M, atunci determinați aria triunghiului DPM.

Testul 28

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $308:4\cdot 2$ este egal cu ....

(5p) **2.** Amplificând fracția $\dfrac{5}{8}$ cu 7, se obține fracția ....

(5p) **3.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A=\{x\,|\,5\le x<8,\ x\in\mathbb{R}\}$ este egală cu ....

(5p) **4.** Un trapez are linia mijlocie de 15 cm. Suma lungimilor bazelor este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din Figura 1 cu toate muchiile congruente. Dacă $AB=4$ cm, atunci aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

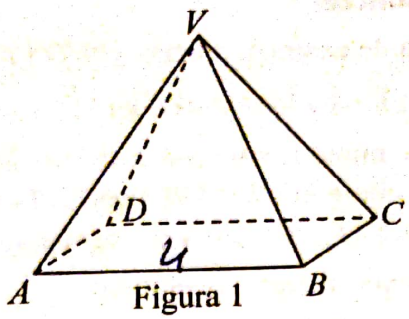


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Media clasei este egală cu ....

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Fie mulțimea $B=\left\{\overline{abc}\,\middle|\,\overline{abc}=a+10b+100c\right\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea B, acesta să fie divizibil cu 5.

(5p) **3.** Un aparat de filmat se ieftinește cu 20% din prețul pe care îl are. După un timp aparatul de filmat se scumpește cu 20% din noul preț. După scumpire aparatul costă 1152 lei. Determinați prețul inițial al aparatului de filmat.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre axa Ox și reprezentarea grafică a funcției considerate.

(5p) **5.** Arătați că $\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}\right):\frac{1}{x^2-1}=x^2-4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un cort în formă de prismă dreaptă cu bazele triunghiurile echilaterale ABC și $ABCA'B'C'$ are latura bazei de 3 m și înălțimea de 5 m.

(5p) *a)* Calculați distanța de la punctul A la planul $(CC'B')$.

(5p) *b)* Determinați volumul cortului.

(5p) *c)* Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 54 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua).

2. Figura 2 reprezintă schița unei grădini formată din patru parcele în formă de pătrat. Aria grădinii este de 100 m^2.

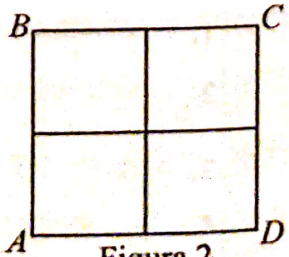


Figura 2

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței unei parcele.

(5p) *b)* Fiecare parcelă este înconjurată de un gard. Determinați lungimea gardului.

(5p) *c)* De pe fiecare parcelă se recoltează 50 kg de roșii. Un kg de roșii se vinde cu 2 lei și 50 de bani. Determinați suma de bani obținută din vânzarea roșiilor recoltate din grădină.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 29

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $111:3-41$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Într-o clasă cu 30 de elevi, 30% sunt băieţi. Numărul băieţilor din clasă este egal cu ... .

(5p) **3.** Fie mulţimea $A=\{x \mid 13<x\leq 28,\ x\in\mathbb{N}\}$.
Numărul elementelor mulţimii A este egal cu ... .

(5p) **4.** Un romb are diagonalele de 6 cm şi 12 cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ din Figura 1 cu $AB=6$ cm. Distanţa dintre punctele A şi C' este egală cu ... cm.

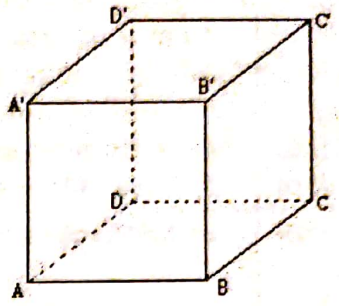
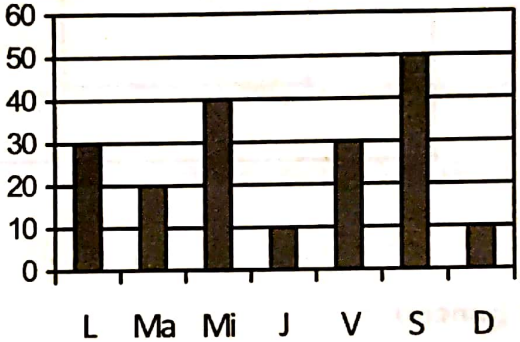


Figura 1

(5p) **6.** În diagrama de mai jos sunt reprezentate numărul de intrări de autoturisme dintr-o parcare. Ziua săptămânii în care a intrat a 110-a maşină este ....



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC şi vârf V.

(5p) **2.** Dacă $a+b=6$, atunci determinaţi media aritmetică a numerelor a^2 ; b^2 şi $2ab$.

(5p) **3.** Radu şi Alexandra au împreună 10 lei. Ei hotărăsc să cumpere împreună o carte, participând cu sume egale de bani. Radu este nevoit să împrumute de la Alexandra 1 leu, iar după cumpărarea cărţii Alexandra rămâne cu 5 lei. Determinaţi suma de bani pe care a avut-o Alexandra iniţial.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+3$.

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia considerată.

(5p) *b)* Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(5,3a+1)$ este situat pe graficul funcţiei f.

(5p) **5.** Arătaţi că $\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;2\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O cutie pentru medicamente are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$. Cutia este plină cu 36 de recipiente medicale în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 2 m, 4 m şi respectiv 6 m.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) *a)* Arătați că muchia cubului este egală cu 12 m.
(5p) *b)* Calculați aria totală a cubului.
(5p) *c)* Determinați probabilitatea ca, alegând o muchie oarecare a unui paralelipiped dreptunghic din cele 36, aceasta să aibă lungimea de 2 m.

2. Figura 2 reprezintă schița unui parc în formă de dreptunghi $ABCD$, cu lungimea de 40 m și lățimea de 20 m. În interiorul parcului se află un lac în formă de dreptunghi $MNPQ$ cu lungimea de 20 m și lățimea de 10 m. Lacul este înconjurat de gazon. În lac se află 9 pești.
(5p) *a)* Determinați aria suprafeței acoperite cu gazon.
(5p) *b)* Dacă $AM = BN = CP = DQ$, atunci calculați lungimea segmentului $[AM]$.
(5p) *c)* Arătați că în orice moment în lac există cel puțin doi pești pe o suprafață de 25 m^2.

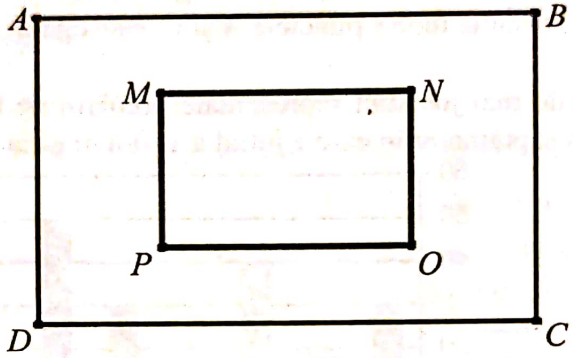


Figura 2

Testul 30

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Scris sub formă de fracție zecimală, numărul $\frac{11}{5}$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dintre numerele $a = 1,4$ și $b = \sqrt{2}$, mai mare este numărul ... .

(5p) **3.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $(-2, 3)$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Dacă diametrul unui cerc este egal cu 14 cm, atunci lungimea razei cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 5$ cm. Distanța dintre punctele D' și B este egală cu ... cm.

(5p) **6.** Utilizând diagramele din Figura 1, completați tabelul de mai jos.

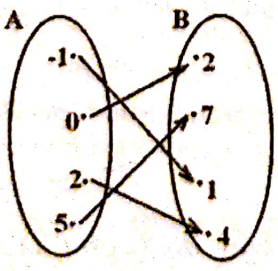


Figura 1

x	-1	0	2	3	5
y	1	...	...	...	...

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC și vârf V.

(5p) **2.** Fie mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,4<x\leq a, a\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,y\vdots 3\}$. Determinați numerele naturale a știind că mulțimea $A\cap B$ are 20 de elemente.

(5p) **3.** Răspunzând la toate cele 100 de întrebări ale unui test, un elev a obținut 340 de puncte. Pentru un răspuns corect s-au acordat 5 puncte, iar pentru un răspuns incorect s-au scăzut 3 puncte. Determinați numărul răspunsurilor corecte date de elev.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-2$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre axa Oy și reprezentarea grafică a funcției considerate.

(5p) **5.** Arătați că $\dfrac{2x+1}{x-2}+\dfrac{1-2x}{x+2}+\dfrac{x^2+16}{x^2-4}=\dfrac{x+8}{x-2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Cubul din Figura 3 conține 4 litri de apă. Înălțimea la care se ridică apa în cub este egală cu 8 cm.

(5p) *a)* Arătați că lungimea muchiei cubului este egală cu $10\sqrt{5}$ cm.

(5p) *b)* Calculați aria totală a cubului.

(5p) *c)* Determinați volumul de apă necesar umplerii cubului.

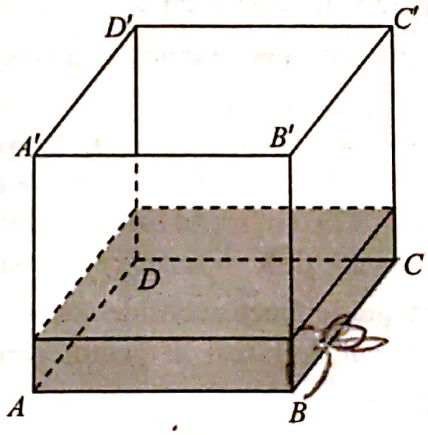


Figura 3

2. Figura 3 reprezintă schița unui teren format din două dreptunghiuri $AMPD$ și $BCPM$, fiecare având aria de 15 m^2, respectiv 34 m^2. Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci:

(5p) *a)* Arătați că lungimea laturii pătratului $ABCD$ este egală cu 7 m.

(5p) *b)* Calculați aria triunghiului APB.

(5p) *c)* Determinați masa roșiilor recoltate de pe suprafața $MBCP$, știind că masa roșiilor recoltate de pe suprafața $AMPD$ este egală cu 30 kg.

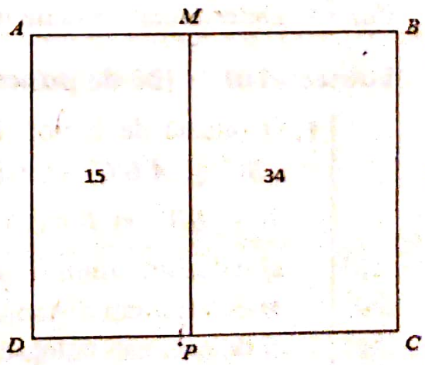


Figura 4

Scanned with OKEN Scanner

Testul 31

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $312:3-107$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Dacă 20% din x este 20, atunci valoarea numărului x este egală cu ... .

(5p) **3.** Produsul elementelor mulțimii $(-\infty;\sqrt{3})\cap\mathbb{Z}$ este egal cu ... .

(5p) **4.** Perimetrul unui romb este de 12 cm. Lungimea unei laturi a rombului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din Figura 1 cu toate muchiile congruente. Dacă $AB=6$ cm, atunci aria triunghiului VAC este egală cu ... cm^2.

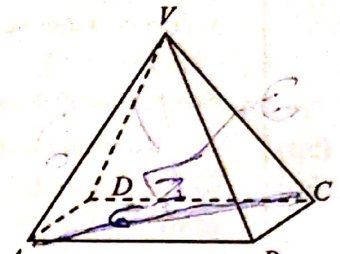


Figura 1

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obținut note cel puțin egale cu 7 reprezintă ... % din numărul elevilor din clasă.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	8	6	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Determinați numerele reale pozitive a,b,c știind că media geometrică a numerelor a și b este $3\sqrt{2}$, media geometrică a numerelor b și c este 6, iar media geometrică a numerelor a și c este $2\sqrt{6}$.

(5p) **3.** Dacă elevii unei clase se așează câte doi în bancă, atunci un elev stă singur în bancă, iar două bănci rămân libere. Dacă elevii se așează câte trei în bancă, atunci rămân șase bănci libere. Aflați numărul băncilor din clasă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m+1,2m)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Determinați valorile lui x din intervalul $(-6,6)$ pentru care $\frac{x+2}{3}\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O bucată de brânză în formă de prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale ABC și $A'B'C'$ se taie după un plan MNP paralel cu planul ABC, $M\in(AA')$, $N\in(BB')$ și $P\in(CC')$. Dacă $AB=AM=MA'=6$ cm, atunci:

(5p) *a)* calculați volumul feliei de brânză $ABCMNP$;

(5p) *b)* determinați distanța de la punctul C la dreapta MN;

(5p) *c)* determinați valoarea sinusului unghiului dintre planele (ABP) și (ABC).

2. Figura 2 reprezintă schița unui teren format din două parcele, dreptunghiul $ADCE$ și triunghiul dreptunghic BEC. Parcela $ADCE$ este cultivată cu grâu, iar parcela BEC

Scanned with OKEN Scanner

este cultivată cu secară. Dacă $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm şi $DC = 4$ cm, atunci:

(5p) *a)* Determinaţi perimetrul patrulaterului $ABCD$.

(5p) *b)* Calculaţi cât la sută din aria suprafeţei cultivate cu secară reprezintă aria suprafeţei cultivate cu grâu.

(5p) *c)* Determinaţi distanţa de la punctul B la dreapta AC.

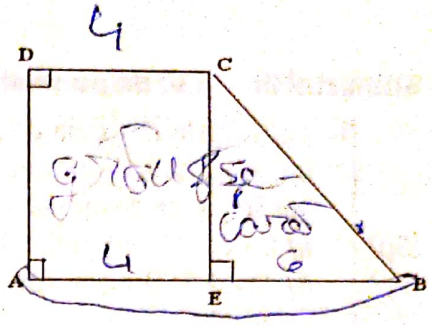


Figura 2

Testul 32

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $3-4\cdot 5$ este egal cu ... .

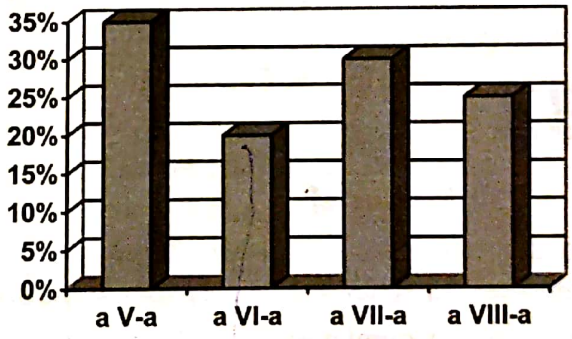
(5p) **2.** Dacă $\frac{x}{5}=\frac{9}{15}$, atunci valoarea numărului x este egală cu ... .

(5p) **3.** Mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\le 3\sqrt{5}\right\}$ conţine un număr de ... numere naturale.

(5p) **4.** Dacă lungimea unui cerc este egală cu 12π cm, atunci lungimea razei cercului este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului dreptelor AB şi $A'C'$ este egală cu ... °.

(5p) **6.** Într-o şcoală gimnazială sunt 300 de elevi, iar repartiţia procentuală a elevilor pe clase este reprezentată în diagrama de mai jos. Numărul elevilor din clasa a VI-a este egal cu ... .



Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de bază $ABCD$ şi vârf V.

(5p) **2.** Demonstraţi că numărul $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ este natural.

(5p) **3.** În urma unor reduceri de Crăciun, preţul unui televizor se reduce cu 25%. După sărbători, noul preţ se măreşte cu 20%, ajungând ca televizorul să coste 3600 lei. Aflaţi preţul iniţial al televizorului.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.

(5p) *a)* Reprezentaţi grafic funcţia considerată.

(5p) *b)* Determinaţi numărul real m pentru care punctul $A(m+1,-7)$ este situat pe graficul funcţiei f.

(5p) **5.** Arătaţi că $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+2}=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;+1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu lungimea de 25 cm şi lăţimea de 10 cm, este plin cu apă. Cu o parte din apa din acvariu se umple un vas în formă de cub cu muchia de 10 cm.

(5p) *a)* Calculaţi volumul cubului.

(5p) *b)* Dacă înălţimea acvariului este egală cu 30 cm, atunci calculaţi aria laterală a acvariului.

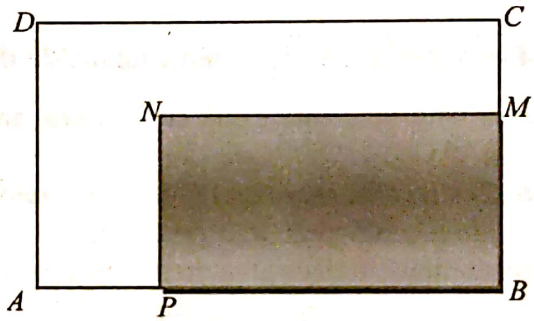
(5p) *c)* Determinaţi cu câţi centimetri scade nivelul apei din acvariu.

2. Dreptunghiul $ABCD$ din figura de mai jos reprezintă o coală albă de hârtie. Un elev pictează cu albastru suprafaţa dreptunghiului $MNPB$. Se ştie că $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, $NP = 6$ cm, $MN = 10$ cm.

(5p) *a)* Calculaţi aria suprafeţei pictate cu albastru.

(5p) *b)* Verificaţi dacă aria suprafeţei albe rămase este mai mare decât aria suprafeţei albastre.

(5p) *c)* Determinaţi lungimea segmentului $[DN]$.



Testul 33

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-459+309:3$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Un obiect costă 30 lei. Preţul obiectului după o scumpire cu 20% este egal cu ... lei.

(5p) **3.** Soluţia număr natural a ecuaţiei $x^2 = 9$ este egală cu ... .

(5p) **4.** Diagonala unui dreptunghi cu lungimea de 8 cm şi lăţimea $\frac{1}{4}$ din lungime, este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din Figura 1 cu $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm şi $DD' = 10$ cm. Aria triunghiului $D'DB$ este egală cu ... cm^2.

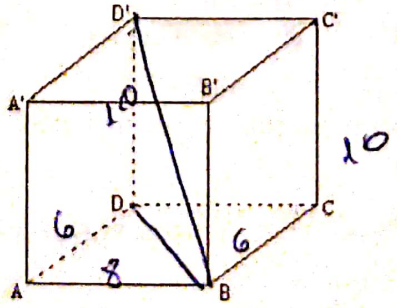


Figura 1

Scanned with OKEN Scanner

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute în urma măsurării înălțimilor elevilor dintr-o clasă. Numărul elevilor din clasă este egal cu ... .

Înălțimea (cm)	158	163	167	170	175
Număr elevi	3	6	4	6	5

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de bază MNP și vârf Q.

(5p) **2.** Suma a două numere naturale este cel mult egală cu 48. Aflați cele două numere știind că împărțind pe cel mai mare la cel mai mic, obținem câtul 5 și restul 6.

(5p) **3.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\sqrt{12}+2\sqrt{2}$ și $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

(5p) **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+1)x+5$. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(-2,m+6)$ este situat pe graficul funcției f.

5. Se consideră expresia $E(x)=(x+3)\cdot\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{1}{x-3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

(5p) *a)* Arătați că $E(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$.

(5p) *b)* Aflați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $E(x)\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. O cutie de carton are formă de prismă dreaptă cu baza pătrat, $ABCDEFGH$, cu fețele laterale verzi și bazele albe. Aria suprafeței vopsite în verde este de $324\sqrt{6}$ m^2 și lungimea muchiei bazei este de $9\sqrt{2}$ m. Cutia este umplută cu pachete în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 m, 4 m și 6 m.

(5p) *a)* Determinați lungimea muchiei laterale a cutiei.

(5p) *b)* Verificați dacă în cutie pot încăpea 34 pachete.($\sqrt{3}\cong 1,73$)

(5p) *c)* Determinați distanța de la punctul F la dreapta AC.

2. Figura 2 reprezintă schița unei grădini împărțită în trei parcele egale: triunghiurile ADE, DEC, BCE sunt dreptunghice isoscele, iar $DC=4$ m. Grădina este împrejmuită cu un gard.

(5p) *a)* Aflați lungimea gardului.

(5p) *b)* Pe suprafața grădinii se plantează butași de trandafiri. Știind că pe 1 m^2 se pot planta 9 butași de trandafiri, aflați numărul butașilor necesari pentru a acoperi suprafața grădinii.

(5p) *c)* Grădina este străbătută de o alee care pornește din punctul A și se termină în punctul C. Calculați lungimea segmentului $[AC]$.

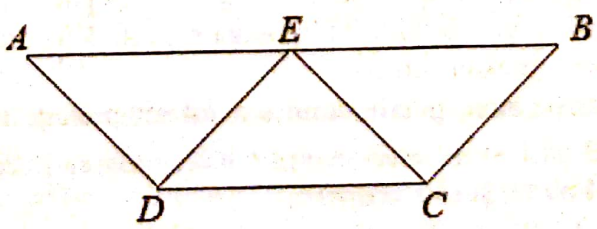


Figura 2

Scanned with OKEN Scanner

Testul 34

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $7-\frac{1}{2}:\frac{1}{24}$ este egal cu ....

(5p) **2.** Numerele întregi negative din intervalul $[-4,2)$ sunt în număr de ....

(5p) **3.** Probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ acesta să fie divizibil cu 3 este egală cu ....

(5p) **4.** Latura unui pătrat echivalent cu un romb de diagonale 9 cm și 8 cm este egală cu ... cm.

(5p) **5.** Diagonala unui cub cu muchia de 3 cm este egală cu ... cm.

(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile înregistrate în decursul unei săptămâni. Temperatura medie a săptămânii este egală cu ... .

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	27°	28°	29°	27°	24°	26°	28°

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un cub notat *EVALUARE*.

(5p) **2.** Stabiliți dacă numărul $A=\sqrt{2013^2-2\cdot 2013+1}$ este număr natural.

(5p) **3.** Un depozit are de trimis pachete cu semințe care, în funcție de greutatea lor sunt de 2 tipuri: de 20 g și de 25 g. Determinați câte pachete din fiecare tip conține un colet care are greutatea de 3 kg, iar numărul total de pachete cu semințe este 128.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția considerată.

(5p) *b)* Determinați numărul real a pentru care punctul $M(a,a+1)$ este situat pe graficul funcției f.

(5p) **5.** Simplificați expresia $E(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un pavilion are forma unui paralelipiped dreptunghic. Dimensiunile bazei acestuia sunt de 14 m, respectiv 8 m, iar înălțimea este de 4 m.

(5p) *a)* Să se determine volumul pavilionului.

(5p) *b)* Cortul este folosit pentru una din probele pe echipe ale unui concurs de cercetași. Spațiul necesar fiecărei echipe, pentru a-și desfășura proba, este direct proporțional cu numărul membrilor echipei. Știind ca la concurs participă 3 echipe care au 3, 5 și respectiv 6 membri și este folosită întreaga suprafață a cortului, să se determine care este spațiul alocat fiecărei echipe.

(5p) *c)* Pentru confecționarea pavilionului s-a folosit prelată cu lățimea de 1,5 m. Câți metri de prelată au fost necesari pentru confecționarea pavilionului? Se consideră că pavilionul are 4 pereți și este acoperit.

Scanned with OKEN Scanner

2. Un parc are forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 157 m, respectiv 1000 m. În centrul acestuia se află o zonă, de forma unui disc, plantată cu flori, care reprezintă 20% din întreaga suprafață a parcului.

(5p) *a)* Calculați aria suprafeței plantate cu flori.

(5p) *b)* Determinați raza discului ce reprezintă suprafața plantată cu flori. ($\pi \approx 3{,}14$).

(5p) *c)* Cât costă împrejmuirea parcului și a rondului de flori știind că 1 metru de gard costă 14,5 lei?

Testul 35

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(\frac{5}{9}+\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{27}{6}$ este egal cu ....

(5p) **2.** Dacă $x=2$ și $y+z=3$, atunci $x\cdot y+x\cdot z$ este egală cu ....

(5p) **3.** Probabilitatea ca aruncând un zar să apară un număr par este ....

(5p) **4.** Un triunghi dreptunghic isoscel are mediana dusă din vârful unghiului drept egală cu 4 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.

(5p) **5.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ din Figura 1 cu toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele VA și BC este egală cu ... °.

(5p) **6.** Media aritmetică ponderată a numerelor 6, 7, 8 având ponderile 2, 3, 4 este egală cu ... .

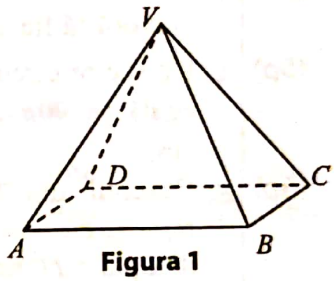


Figura 1

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, un tetraedru regulat notat $TEST$.

(5p) **2.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2\le 3x+1\le 8\}$. Determinați $A\cap\mathbb{N}$.

(5p) **3.** Suma a trei numere naturale este 120. Știind că suma dintre primul și al treilea număr este de 4 ori mai mare decât al doilea număr și că unul dintre numere este egal cu cel mai mic pătrat perfect de două cifre, determinați numerele.

4. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+1$.

(5p) *a)* Aflați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

(5p) *b)* Determinați aria suprafeței delimitată de graficele celor două funcții și axa Oy.

(5p) **5.** Arătați că expresia $E(x)=(2x+1)(1-2x)+(2x+3)^2-3(4x-1)$ nu depinde de x.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un calorifer are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L=2{,}5\,m$, $l=30\,cm$ și $h=0{,}8\,m$.

(5p) *a)* Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru confecționarea unui calorifer?

(5p) *b)* Care este volumul caloriferului exprimat în litri?

(5p) *c)* Prețul unui calorifer este de 420 lei. Pentru achiziționarea unui număr mai mare de 5 calorifere, la fiecare calorifer ce depășește această cantitate se acordă o reducere de 10%. Care este prețul plătit de un client pentru cumpărarea a 9 calorifere?

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie dreptunghiul $ABCD$, cu dimensiunile $AB = 60\,\text{cm}$ şi $BC = 40\,\text{cm}$. Se consideră un punct $M \in [AB]$ astfel încât $MB = x$ $(x < 60)$.

(5p) *a)* Să se determine lungimea segmentului $[AM]$, ştiind ca aria trapezului $DCBM$ este de 5 ori mai mare decât aria triunghiului AMD.

(5p) *b)* Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, determinaţi cât la sută din perimetrul dreptunghiului $ABCD$ reprezintă perimetrul triunghiului AMD.

(5p) *c)* Dacă lungimile segmentelor $[AM]$ şi $[MB]$ sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{4}$, calculaţi lungimea liniei mijlocii a trapezului $DCBM$.

Testul 36

Subiectul I (30 de puncte)

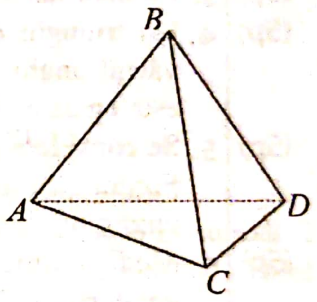
(5p) **1.** Rezultatul calculului $0,01 : 0,001$ este egal cu ....

(5p) **2.** Suma elementelor mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$ este egală cu ....

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 30 elevi din care 18 fete. Probabilitatea ca la o oră să fie ascultat un băiat este egală cu ....

(5p) **4.** Un sector circular de 30° provine dintr-un cerc cu lungimea egală cu 90π cm. Raza cercului are lungimea egală cu ... cm.

(5p) **5.** Desenul din figura alăturată reprezintă un tetraedru regulat cu muchia de 3 cm. Distanţa de la punctul A la dreapta CD este egală cu ... cm.



(5p) **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obţinute de elevii unei clase la un test de evaluare. Numărul elevilor care au obţinut note cel mult egale cu 6 este egal cu ... .

Nota	4	5	6	7	9	10
Număr elevi	2	3	8	4	4	3

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată de bază $MNPQ$ şi vârf S.

(5p) **2.** Aflaţi trei numere ştiind că primele două sunt direct proporţionale cu 2 şi 5, ultimele două sunt invers proporţionale cu 3 şi 4, iar diferenţa dintre ultimul şi primul este egală cu 14.

(5p) **3.** Verificaţi dacă numărul $a = \sqrt{\sqrt{16}} - |2 - \sqrt{5}| - |3 - \sqrt{5}|$ este număr natural.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b - 6$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) *a)* Aflaţi a şi b ştiind că punctele $A(0,-2)$ şi $B(1,2)$ aparţin graficului funcţiei f.

(5p) *b)* Pentru $a = 4$ şi $b = -2$ reprezentaţi grafic funcţia f.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(a,b) = a^2 + 9b^2 - 4a + 6b + 5$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi numerele a şi b ştiind că $E(a,b) = 0$.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un vas are forma unui tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de 6cm.

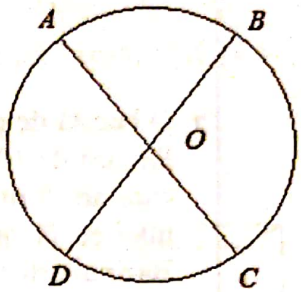
(5p) *a)* Determinaţi aria totală a tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

(5p) *b)* Calculați valoarea sinusului unghiului dintre planele (ABD) și (ACD).

(5p) *c)* O picătură de apă aflată în mijlocul P al muchiei $[AD]$ se prelinge pe suprafața laterală a vasului până ajunge în punctul T de pe muchia $[AB]$. Determinați lungimea segmentului $[PT]$.

2. Figura alăturată reprezintă schița unui roți de bicicletă.



(5p) *a)* Dacă lungimea roții este de 8π cm, atunci determinați lungimea spiței AC.

(5p) *b)* Dacă spițele AC și BD formează un unghi cu măsura de $120°$, determinați aria suprafeței triunghiului AOB.

(5p) *c)* Bicicleta se deplasează pe o pistă cu lungimea de 800 m. Aflați câte rotații complete face roata pentru a parcurge pista. ($\pi \cong 3{,}14$)

Testul 37

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $22^{2011} : 22^{2010} + 3^4 - 103$ este ... .

(5p) **2.** Dacă $a = 5$ și $b + c - d = 9$, atunci $a(b+c) - ad$ este ... .

(5p) **3.** După simplificare, fracția $\frac{3^{n+2} \cdot 2^{n+1}}{3^n \cdot 2^{n+2}}$ este egală cu fracția ireductibilă ... .

(5p) **4.** Latura triunghiului echilateral înscris în cercul cu raza de 6 cm este ... .

(5p) **5.** În piramida triunghiulară regulată $VABC$ se consideră înălțimea VO, unde $O \in (ABC)$. Măsura unghiului format de dreptele VO și BC este ... °.

(5p) **6.** În tabelul următor sunt reprezentate notele obținute la teza la matematică de elevii clasei a VIII-a. Media clasei este egală cu ... .

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	0	2	3	5	6	5	4

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați pe foaia de examen un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Determinați numerele raționale a, b știind că $a = b\sqrt{2}$.

(5p) **3.** Determinați numerele reale x, y care verifică egalitatea $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

(5p) *a)* Reprezentați grafic funcția f.

(5p) *b)* Calculați $f(1) + f(2) + ... + f(50)$.

(5p) *c)* Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $P(a^2, 4a+1)$ se află pe graficul funcției f.

Subiectul III (30 de puncte)

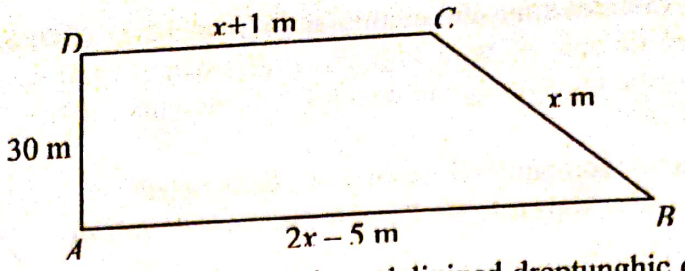
1. Un parc are forma unui trapez dreptunghic, ca în figura alăturată.

(5p) *a)* Determinați câți metri de gard sunt necesari pentru a împrejmui complet parcul.

(5p) *b)* Calculați aria parcului.

(5p) *c)* Dacă M și N sunt mijloacele laturilor BC și AD, calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

Scanned with OKEN Scanner



2. O bucată de gheață are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 12 dm, lățimea de 10 dm și înălțimea de 8 dm. Bucata de gheață se introduce într-un bazin care are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, care are latura bazei mari egală cu 20 dm, latura bazei mici egală cu 12 dm și înălțimea egală cu 10 dm. Bazinul este plin cu apă până la jumătatea înălțimii.

(5p) *a)* Calculați volumul bucății de gheață.

(5p) *b)* Calculați volumul bazinului.

(5p) *c)* Precizați, argumentând răspunsul, dacă atunci când bucata de gheață se introduce în bazin și se topește, acesta poate prelua sau nu întreaga cantitate de apă. (Se consideră că densitatea apei este constantă la variațiile de temperatură).

Testul 38

Subiectul I (30 de puncte)

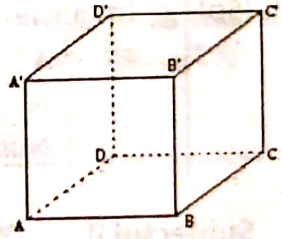
(5p) **1.** Rezultatul calculului $10-10:10$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Numărul elementelor mulțimii $[-4,3)\cap\mathbb{Z}$ este ... .

(5p) **3.** După o reducere cu 25% prețul unui produs este de 300 lei. Prețul inițial al produsului a fost de ... lei.

(5p) **4.** În paralelogramul $ABCD$, măsura unghiului A este de $42°30'$. Măsura unghiului B este ...

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului $AD'C$ este egală cu....



(5p) **6.** În luna ianuarie s-au înregistrat următoarele temperaturi:

Nr. zile	2	1	5	8	4	2	9
Temperatura	-16°	-10°	-14°	-1°	-5°	-1°	2°

Temperatura medie a lunii ianuarie a fost de...

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată, notată $VABCD$.

(5p) **2.** Într-o clasă sunt 33 de elevi. Numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieților. Câți băieți și câte fete sunt în clasă ?

(5p) **3.** Arătați că numărul $n=5\sqrt{11}-5\sqrt{3}+\sqrt{75}-4\sqrt{11}-\frac{11}{\sqrt{11}}$ este număr întreg.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(a-2)x+3$.

(5p) *a)* Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1,4)$ aparține graficului funcției f.

(5p) *b)* Pentru $a=3$ determinați distanța de la originea sistemului de axe xOy la graficul funcției f.

(5p) **5.** Descompuneți în factori expresia : $(x+3)^3-16x-48$.

M. PERIANU • C. STĂNICĂ • I. BALICA • C. MÎNESCU • C. LAZĂR

Scanned with OKEN Scanner

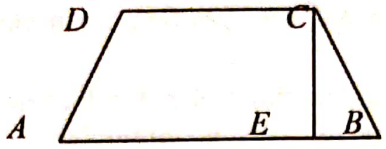
Subiectul III (30 de puncte)

1. O grădină în formă de trapez isoscel $ABCD$ cu bazele AB şi CD are baza mare $AB = 18$ dam şi înălţimea $CE = 8$ dam. Se ştie că $5CE = 4CB$.

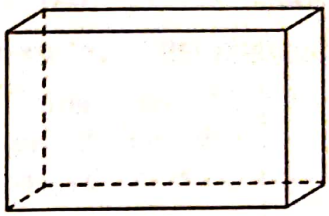
(5p) *a)* Câţi ari are suprafaţa terenului $ABCD$?

(5p) *b)* Cât la sută din aria terenului $ABCD$ reprezintă aria parcelei BEC ?

(5p) *c)* Cât costă împrejmuirea terenului $ABCD$ dacă 1 m liniar de gard costă 15,5 lei ?



2. Într-o sală de sport trebuie instalate 12 calorifere confecţionate din tablă. Un calorifer are dimensiunile $L = 2$ m, $l = 20$ cm şi $h = 0{,}70$ m.



(5p) *a)* Aflaţi câtă tablă este necesară pentru confecţionarea caloriferelor.

(5p) *b)* Aflaţi capacitatea caloriferului exprimată în litri.

(5p) *c)* Dacă un metru pătrat de tablă costă 35 lei, ce sumă este necesară pentru realizarea caloriferelor ?

Testul 39

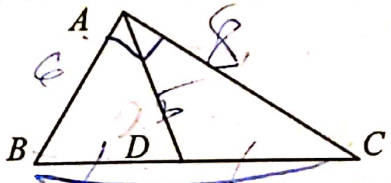
Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $10^2 - 2.10 - 2^4.5$ este egal cu … .

(5p) **2.** Valoarea de adevăr a propoziţiei: „2012 este pătrat perfect” este … .

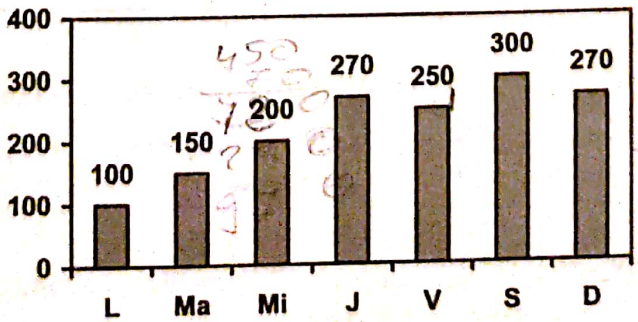
(5p) **3.** 4 muncitori termină o lucrare în 12 zile.6 muncitori termină aceeaşi lucrare în … zile.

(5p) **4.** În figura alăturată , triunghiul ABC este dreptunghic în A, iar AD este mediană. Dacă $AD = 5$ cm şi $AC = 8$ cm, atunci aria triunghiului ABC este … cm^2.



(5p) **5.** Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, atunci măsura unghiului dintre dreptele AD' şi $B'C$ este …°.

(5p) **6.** In diagrama de mai jos este reprezentat numărul vizitatorilor unui muzeu într-o săptămână. Media vizitatorilor în această săptămână este de … .



Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, prisma patrulateră regulată, notată $ABCDA'B'C'D'$.

(5p) **2.** Determinați numerele reale x și y știind că $4x^2+y^2-4\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y+5=0$

(5p) **3.** Calculați $7x+5y+3z$ știind că $2x+y-3z=4$ și $x+y+3z=18$.

4. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=bx+a-3$.

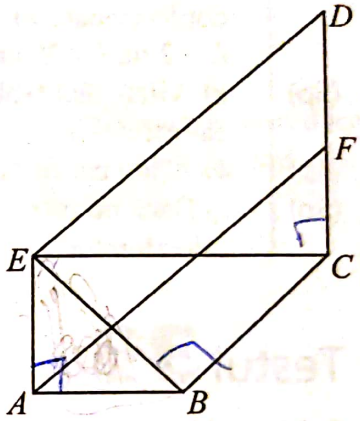
(5p) *a)* Determinați a și b astfel încât punctul $A(2,3)$ să fie punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

(5p) *b)* Pentru $a=0$ și $b=3$, reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe.

(5p) *c)* Aflați aria patrulaterului determinat de graficele funcțiilor f și g, axa Ox și axa Oy.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Un teren agricol se compune din trei parcele în formă de triunghi dreptunghic isoscel ABE, BEC și CDE, așezate ca în figura alăturată. Se cunoaște că $m(\widehat{BAE})=m(\widehat{EBC})=m(\widehat{ECD})=90°$



(5p) *a)* Știind că aria parcelei ABE este de 200 m^2, să se calculeze aria întregului teren.

(5p) *b)* Câți metri de gard sunt necesari pentru împrejmuirea terenului ?

(5p) *c)* Dacă F este mijlocul lui $[DC]$, stabiliți natura patrulaterului $AFDE$.

2. Firma „La Izvor" îmbuteliază apa plată în bidoane de câte 5 litri. Bidoanele sunt introduse câte două în cutii de carton în forma de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 50 cm, 25 cm și înălțimea de 60 cm. Cutiile se transportă cu un camion care are spațiul de transport în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L=8$ m, $l=2{,}5$ m și $h=3$m.

(5p) *a)* Aflați volumul spațiului de transport al camionului.

(5p) *b)* Câte cutii încap în camion, fără a rămâne spațiul liber?

(5p) *c)* Câți litri de apă se transportă o dată cu camionul?

Testul 40

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(208:2-2^2):5^2$ este egal cu ... .

(5p) **2.** Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor 16 și 36 este ....

(5p) **3.** Salariul unui muncitor este de 2000 lei. După o mărire cu 15% salariul său va fi de ... lei.

(5p) **4.** Un hexagon regulat $ABCDEF$ cu $AD=16$ cm are $AC=$ ... cm.

(5p) **5.** Aria pătratului cu diagonala de $5\sqrt{2}$ cm este egală cu ... cm^2.

(5p) **6.** În luna iulie s-au înregistrat într-o săptămână următoarele temperaturi:

Data	12	13	14	15	16	17	18
Temperatura	27°C	25°C	29°C	30°C	32°C	33°C	27°C

Temperatura medie a săptămânii a fost de ... .

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenați, pe foaia de examen, piramida patrulateră regulată, notată *VABCD*.

(5p) **2.** Un agricultor a cules într-o zi 59 kg de pere si 67 kg de mere. După ce le așează în lădițe rămân 3 kg de pere și 4 kg de mere. Aflați câte kg de fructe sunt într-o lădiță dacă lădițele au aceeași capacitate.

(5p) **3.** Fie mulțimile $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|2x-5|\le 7\}$ si $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,-1\le\frac{4x+8}{4}<7\right\}$.

Calculați: $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

(5p) ***a)*** Determinați a și b știind că $A(2\,;7)$ și $B(-1\,;-8)$ aparțin graficului funcției f.

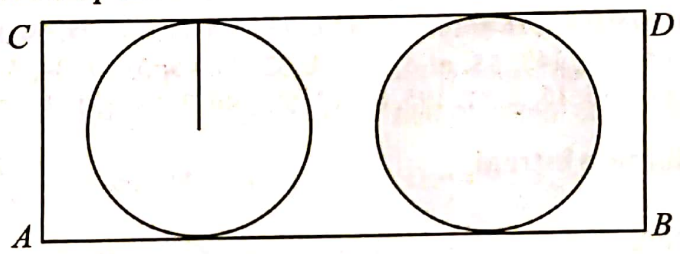
(5p) ***b)*** Aflați aria triunghiului format de graficul funcției și axele Ox și Oy.

(5p) **5.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x-2)(x+2)-3x^2+15$.

Rezolvați ecuația $E(x)=x^2+5x+12$ în mulțimea numerelor reale.

Subiectul III (30 de puncte)

1. Figura de mai jos reprezintă două ronduri cu flori situate pe o platformă dreptunghiulară acoperită cu iarbă. Dimensiunile platformei sunt $L=12$ m și $l=4$ m.

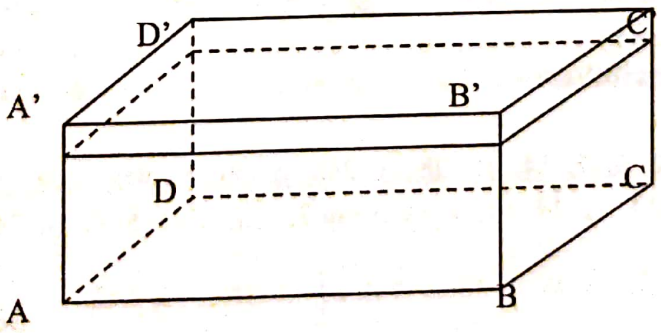


(5p) ***a)*** Calculați aria platformei dreptunghiulare.

(5p) ***b)*** Aflați aria suprafeței acoperită cu iarbă știind că rondurile sunt acoperite de lalele și panseluțe. ($\pi=3{,}14$)

(5p) ***c)*** Fiecare rond conține 240 de fire de lalele și 180 de fire de panseluțe. Dacă un fir de lalea costă 3,5 lei, iar un fir de panseluță costă 2,5 lei, aflați cât au costat florile din cele două ronduri.

2. Un bazin plin cu apă în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $L=6$ m, $l=5$ m, $h=4$ m.



(5p) ***a)*** Aflați volumul bazinului.

(5p) ***b)*** În bazin sunt 90000 litri de apă. Aflați înălțimea apei din bazin.

(5p) ***c)*** Golirea bazinului se face prin 4 robinete, fiecare cu un debit de 10 l/s. În cât timp se golește bazinul?

Scanned with OKEN Scanner

Soluții

Capitolul 1. Aritmetică/Algebră

Tema 1.1 Numere naturale. Operații cu numere naturale

Soluții – Partea I

1. 300008. **2.** 170. **3.** 345000. **4.** *b*. **5.** 26. **6.** 11. **7.** 45. **8.** *O, B, A, C*. **9.** 28305. **10.** 709. **11.** 3536. **12.** 7. **13.** 3. **14.** 180. **15.** 336. **16.** 4. **17.** 2. **18.** 3. **19.** 2. **20.** 7. **21.** 6. **22.** *a*. **23.** *y*. **24.** 44. **25.** 168. **26.** 10. **27.** 5. **28.** 4. **29.** 1. **30.** 68.

Soluții – Partea a II-a

31. *a)* 14; *b)* 70; *c)* 112. **32.** *a)* 88; *b)* 46; *c)* 182; *d)* 113; *e)* 54; *f)* 155. **33.** *a)* 448; *b)* 704; *c)* 379; *d)* 304. **34.** *a)* 858; *b)* 112746; *c)* 5831; *d)* 201100. **35.** *a)* 106; *b)* 15; *c)* 8; *d)* 992. **36.** *a)* 2; *b)* 100; *c)* 13; *d)* 2028. **37.** $a+c=2a+b+2c-(a+b+c)=16$, $5a+2b+5c=2(2a+b+2c)+(a+c)=162$; 2592. **38.** *a)* 180; *b)* 121. **39.** *a)* 28; *b)* 84; *c)* 42; *d)* 98. **40.** 21, 32. **41.** 34, 45; **42.** 3, 4, 5. **43.** *a)*12965; *b)* 860; *c)* 40044; *d)* 2681; *e)* 4194; *f)* 5410. **44.** *a)* 668; *b)* 1006; *c)* 55; *d)* 10. **45.** *a)* 2003^2; *b)* 1006^2; *c)* 315^2. **46.** *a)* 21; *b)*10. **47.** Ultima cifră poate fi 2 sau 7, deci numerele nu pot fi pătrate perfecte. **48.** 13 şi 91. **49.** 16 şi 144. **50.** 11 şi 143. **51.** *a)* $x \in \{78, 79, 80, 81, 82, 83\}$. **52.** 75, 39, 7. **53.** 37, 95, 3. **54.** 217, 145. **55.** *a)* 8, 16, 24, 32, 40, 48; *b)* 17, 34, 51, 68, 85, 102; *c)* 40 + 41+42+...+47 = 348. **56.** 215, 15, 2. **57.** 195, 85, 17. **58.** 146, 7. **59.** 331, 3. **60.** 169, 20.

Tema 1.2 Numere întregi

Soluții – Partea I

1. 2. **2.** natural. **3.** –14. **4.** –4. **5.** 1. **6.** –42. **7.** 6. **8.** –12. **9.** –27. **10.** 10. **11.** 4. **12.** 3^7. **13.** –6. **14.** 2. **15.** –6. **16.** –10. **17.** –2. **18.** –3. **19.** 0. **20.** 6.

Soluții – Partea a II-a

21. $a=-12, b=-4$. **22.** 37. **23.** 79. **24.** 1. **25.** –5. **26.** $(-2)^{30}<(-3)^{20}$. **27.** 23. **28.** 39. **29.** $(-3)^{21}>(-2)^{35}$. **30.** –11. **31.** –78. **32.** *a)* 32; *b)* 112. **33.** *a)* 18; *b)* –9. **34.** $n\in\{-4,3\}$. **35.** 13. **36.** 9. **37.** 5. **38.** (0;7) , (1;2). **39.** –10. **40.** Dacă ecuația dată ar avea vreo soluție, atunci $3x+2$ ar fi divizor al lui 9. Cum $D_9=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$, singurul posibilitate este ca $3x+2=-1$, pentru care $x=-1$. În acest caz, ar rezulta $5y+3=-9$, de unde $y=-\frac{12}{5}\notin\mathbb{Z}$, absurd.

Tema 1.3 Divizibilitate

Soluții – Partea I

1. 1, 2, 3, 4, 6, 12. **2.** 0, 7, 14, 21, 28. **3.** 243. **4.** 30. **5.** 300. **6.** 9. **7.** 248. **8.** 54. **9.** 267. **10.** $\{2,6,10,30\}$. **11.** 1313. **12.** 14. **13.** 0. **14.** 3 sau 7. **15.** $2^2\cdot3\cdot5\cdot7$. **16.** 74. **17.** 12^{36}. **18.** *A*. **19.** 120. **20.** 2.

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* $A=\{0,3,6,15\}$; *b)* $B=\{-12,-6,-4,-2,0,6\}$; *c)* $C=\{1\}$. **22.** *a)* (9,72), (72,9); *b)* (24,132) ; (72,12); *c)* (12,240), (48,60), (60,48), (240,12). **23.** *a)* $3^n\cdot23\vdots23$; *b)* $5^n\cdot66\vdots11$; *c)* $36^n\cdot2001\vdots2001$. **24.** 791. **25.** 57. **26.** 14. **27.** *a)* $3\cdot(2+2^3+...+2^{2005})\vdots3$. *b)* $43\cdot(6+6^4+...+6^{19})\vdots43$. **28.** *a)* 1512, 3516, 4512, 6516, 7512, 9516; *b)* 252; *c)* 1215, 3210, 4215,

Scanned with OKEN Scanner

6210, 7215, 9210. **29.** ***a) b)*** Se arată că ultima cifră este 0; ***c)*** $125\cdot(10^n-1)$ se divide cu 5 şi cu 9. **30.** ***a)*** $(2x+3y)\vdots 5$, $(10x+15y)\vdots 5\Rightarrow(12x+18y)\vdots 5$; ***b)*** Deoarece $(2x+y)\vdots 3$ şi $(3x+6y)\vdots 3\Rightarrow(5x+7y)\vdots 3$. **31.** $a\mid a\cdot b+c\Rightarrow a\mid c$; $a\mid a\cdot c+b\Rightarrow a\mid b$. Deci $a\mid 11b$ şi $a\mid 11c$, de unde rezultă că $a\mid\overline{bc}+\overline{cb}$. **32.** $1001\cdot\overline{abc}\vdots 13$. **33.** Se foloseşte relaţia $3A+B=7\cdot(3a+7b+5c)$. **34.** Deoarece $5B-2A=1$, dacă d este un divizor comun al numerelor A şi B, atunci rezultă $d\mid 1$, deci $(A,B)=1$. **35.** (1,9) ; (5,6). **36.** $\overline{abc}=386$. **37.** Deoarece $\overline{abc}$ şi $a+b+c$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 9, rezultă că $9\mid a+b+c-5$, deci $a+b+c\in\{5,14,23\}$. Din a doua condiţie rezultă $a+b+c=14$. Cum 7 divide $\overline{acb}+2$, folosind proprietăţile divizibilităţii, rezultă $a+2c\in\{12,19\}$. Obţinem soluţiile 149, 275, 338, 464. **38.** Numerele $n+3$ şi $n+6$ au parităţi diferite, deci produsul lor este par. **39.** Avem $b+c=1$ şi $a+d=7$ sau $b+c=2$ şi $a+d=14$. Se obţin soluţiile: 2015, 2105, 7010, 7100, 9025, 9115, 9205. **40.** Restul împărţirii unui număr natural la 5 poate fi 0, 1, 2, 3 sau 4. Având şase numere, două dau acelaşi rest la împărţirea cu 5, deci diferenţa lor este divizibilă cu 5. **41.** Din relaţia dată, rezultă că n este par. Fie $n=2k$; rezultă $m=3k+2$. Atunci $A=(m-2)(n+2)=3k\cdot(2k+2)=6k(k+1)$, care este divizibil cu 6. **42.** ***a)*** Restul împărţirii unui număr natural la 10 este ultima cifră a acestuia. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, deci $M=\{0,1,4,5,6,9\}$. ***b)*** Ultima cifră a lui 3^{48} este 1, iar ultima cifră a lui 2^{25} este 2, deci ultima cifră a lui A este ultima cifră a numărului x^2+2y^2. Ţinând cont de punctul anterior, $u(A)=0$ dacă şi numai dacă $u(x^2)=u(y^2)=0$, iar $u(A)=5$ dacă şi numai dacă $u(x^2)=5$ şi $u(y^2)=0$. În concluzie, dacă A este divizibil cu 5, atunci x şi y sunt divizibile cu 5. **43.** 105. **44.** ***a)*** Notând $s_k=1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, avem $M_k=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$. Deoarece $s_{10}=55$, rezultă că $55\in S_{10}-S_9$. ***b)*** Nu, deoarece din $s_t=2012$, rezultă $t(t+1)=4012$, iar 4024 nu este produs de numere consecutive, întrucât $62\cdot 63<4024<63\cdot 64$. ***c)*** 804. **45.** ***a)*** Dacă $d\mid 3n+7$ şi $d\mid 2n+5$, atunci $d\mid 3(2n+5)-2(3n+7)$, deci $d\mid 1$, adică $d=1$. Ca urmare, fracţia este ireductibilă. Analog la ***c)*** şi ***e)***. ***b)*** Fracţia se simplifică prin 2, întrucât la numărător şi numitor se află numere pare. ***d)*** Fracţia se simplifică prin 11. **46.** Dacă n este numărul sportivilor, atunci $n-6$ se divide cu 10, 14 şi 15, deci şi cu c.m.m.m.c. al lor, adică cu 210. Rezultă că $n=210k+6$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Cel mai mic număr de sportivi este 216. **47.** Dacă $8n+5$ dă restul 5 la împărţirea cu 50, atunci $50\mid 8n$, deci $50\mid n$. Ultimele două cifre ale lui n pot fi 00, 25, 50 sau 75. Apoi, din faptul că $13n+8$ dă restul 13 la împărţirea cu 80, rezultă că $80\mid 13n-5$, deci n este impar. De aici rezultă:

- fie $n=100k+25$, pentru care $13n-5=1300k+320$, care se divide cu 80 pentru valori pare ale lui k;
- fie $n=100k+75$, pentru care $13n-5=1300k+970$, care nu este divizibil cu 4, deci nici cu 80.

Ca urmare, numărul format de ultimele două cifre ale lui n este 25. **48.** 24 minute. **49.** 120. **50.** 4 ore şi 12 minute.

Tema 1.4 Numere raţionale. Fracţii ordinare. Fracţii zecimale

Soluţii – Partea I

1. $\dfrac{67}{60}$. **2.** 3,8(5). **3.** 6,5. **4.** $-3{,}41$ şi $-3{,}42$. **5.** $\dfrac{1}{2}$. **6.** 8. **7.** 10. **8.** $\{0,1,2\}$. **9.** $\dfrac{5}{7}$. **10.** 28. **11.** $\dfrac{7}{3}$. **12.** $A\cap\mathbb{N}=\{5,7\}$; $A\cap\mathbb{Q}=A$. **13.** $a<b<c<d$. **14.** 18,4(3). **15.** $\dfrac{863}{100}$. **16.** $\dfrac{5}{6}$. **17.** 23,75. **18.** 35,438. **19.** 4000. **20.** $\dfrac{143}{140}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Soluții – Partea a II-a

21. ***a)*** Dacă $n \in A$, atunci $2 < n < 7$, deci $A = \{3,4,5,6\}$. Apoi, dacă $n \in B$, din $\frac{3}{2} > \frac{5}{n} > \frac{2}{3}$, avem $\frac{2}{3} < \frac{n}{5} < \frac{3}{2}$, de unde $\frac{10}{3} < n < \frac{15}{2}$, deci $B = \{4,5,6,7\}$. **22.** ***a)*** $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; ***b)*** Înmulțind cu $\frac{1}{2}$ egalitatea anterioară, avem: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, deci $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ **(1)**. Folosind același „truc", avem $\frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$, deci $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$. **23.** $A = 1$ (se obține simplificând fracțiile); grupând, avem $B = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2005} + \frac{2004}{2005}\right) = 2005$. Rezultă de aici că $A - B = 2004$, $A^B = 1$, $(B - 2004)^{A+1} = 25$. **24.** ***a)*** $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)}$.

b) Se folosește identitatea demonstrată la punctul ***a)*** pentru $k = 1,2,\ldots,99$; după sumare avem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \frac{99 \cdot 151}{10100}.$$

25. ***a)*** $-\frac{7}{4}$; ***b)*** -2. **26.** $B = \left\{3;5,(1);-2,3;\frac{8}{5};-4,3(2)\right\}$, $C = \left\{3;\ 5,(1);\ 2,3;\ \frac{8}{5};\ 4,3(2)\right\}$. **27.** ***a)*** Avem $\frac{6}{-5-1} = -1 \in \mathbb{Z}$, deci $-5 \in A$ și $\frac{3 \cdot (-5) + 8}{-5+6} = -7 \in \mathbb{Z}$, deci $-5 \in B$. ***b)*** Dacă $x \in A$, atunci $x - 1 \mid 6$, deci $x - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Rezultă $A = \{-5,-2,-1,0,2,3,4,7\}$. Dacă $x \in B$, atunci $x + 6 \mid 3x + 8$ și, cum $x + 6 \mid 3x + 18$, rezultă $x + 6 \mid 10$, adică $x + 6 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. De aici se obține că $B = \{-16,-11,-8,-7,-5,-4,-1,4\}$. Ca urmare, $A \cap B = \{-5,-1,4\}$. **28.** $A = -2^{79}$, $B = -4 \cdot 3^n$. **29.** ***a)*** $a = \frac{13}{27}$, $b = 15$; ***b)*** $x = 54$. **30.** 1728 lei. **31.** ***a)*** Cei 624 km parcurși a treia zi reprezintă $\frac{3}{5}$ din distanța rămasă de parcurs după prima zi; astfel, în ultimele două zile a parcurs $624 : \frac{3}{5} = 1040$ km, iar a doua zi a parcurs $1040 - 624 = 416$ km. ***b)*** Notând cu d distanța totală, avem $\frac{13}{20}d = 1040$, de unde $d = 1600$ km. **32.** ***a)*** Cei 27 de lei cheltuiți a treia zi reprezintă 60% din suma de bani rămasă după prima zi. Notând această sumă cu s, rezultă $60\% \cdot s = 27$, de unde $s = 45$ lei. A doua zi a cheltuit 18 lei. ***b)*** Dacă x este suma inițială, în prima zi a cheltuit $\frac{2}{3}x + 15$ lei și a rămas cu $\frac{1}{3}x - 15 = 45$ lei. Rezultă $x = 180$ lei. **33.** Suma primelor două numere este $2 \cdot 5 = 10$, a următoarelor trei este $3 \cdot 25 = 75$, iar a ultimelor 5 este $125 \cdot 5 = 625$. Suma celor zece numere este 710, iar media lor aritmetică este 71. **34.** 248 km. **35.** 60, 80, 100. **36.** ***a)*** Notând cu x suprafața de arat, se obține că în prima zi a arat $\frac{3x}{7}$, a doua zi $\frac{5x}{14}$, a treia zi $\frac{x}{14}$ și în ultima zi $\frac{x}{7}$. ***a)*** $x = 350000\ \text{m}^2 = 35$ ha. ***b)*** 15 ha, 12,5 ha, 2,5 ha, 5 ha. **37.** 18,5 și 15. **38.** ***a)*** 375 lei; ***b)*** 1000 lei; ***c)*** Cu 50%. **39.** $x = 37,5$. **40.** $l = 3,84$ cm, $L = 6,34$ cm, $A = 24,3456\ \text{cm}^2$.

Tema 1.5 Rapoarte. Proporții. Procente. Probabilități

Soluții – Partea I

1. $\frac{1}{4}$. **2.** 62. **3.** $\frac{1}{8}$. **4.** $\frac{1}{8}$. **5.** 1,5. **6.** 65%. **7.** 2000 lei. **8.** 16,(6)%. **9.** 13. **10.** 125. **11.** 752. **12.** 1177. **13.** 0,3. **14.** 0,1. **15.** 0,5. **16.** $\frac{1}{16}$. **17.** 0,4. **18.** $\frac{11}{15}$. **19.** $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$. **20.** 9. **21.** 19. **22.** $\frac{2}{9}$. **23.** $\frac{10}{7}$. **24.** 3,5. **25.** 10,8.

Scanned with OKEN Scanner

Soluții – Partea a II-a

26. 9. **27.** 4256, 5376, 1568. **28.** $m=20$, $n=8$. **29.** 60. **30.** 8. **31.** 27,5; 32,5. **32.** 80 kg. **33.** 10 zile. **34.** ***a)*** $m_a=15$; ***b)*** $m_g=12$. **35.** ***a)*** $a=8$; ***b)*** $b=11$. **36.** ***a)*** 9, 15, 12; ***b)*** 60%. **37.** ***a)*** 1400, 2100 și respectiv 4900 lei; ***b)*** 1512, 2268 și respectiv 5292 lei; ***c)*** 140%. **38.** ***a)*** 350; ***b)*** $p=15$. **39.** ***a)*** 1000, 1250, 750; ***b)*** 60%. **40.** ***a)*** 2520; ***b)*** 13020; ***c)*** 434. **41.** ***a)*** 36 g; ***b)*** 120 g. **42.** 8%. **43.** ***a)*** 6,6%; ***b)*** 4200; ***c)*** 19,(047619)%. **44.** ***a)*** 24 albe, 6 negre, 90 roșii; ***b)*** 0,75. **45.** ***a)*** 50 cm; ***b)*** 220 km. **46.** ***a)*** 120 t în prima săptămână, 162 t în a doua săptămână; ***b)*** 76,5%. **47.** ***a)*** 300 lei; ***b)*** 44%. **48.** ***a)*** 135 lei; ***b)*** 135 lei. **49.** ***a)*** 6; ***b)*** 10 rațe, 30 curci, 60 găini. **50.** 18 caiete. **51.** 812,5 kg. **52.** 1000 kg. **53.** ***a)*** 3000, 6000, 6000; ***b)*** 40%; ***c)*** 20%. **54.** 450 lei. **55.** 45 lei. **56.** 2000 lei, 2400 lei. **57.** 15, 24, 36. **58.** 25 zile. **59.** 40 zile. **60.** $\frac{1}{3}$.

Tema 1.6 Numere reale. Radicali. Reguli de calcul cu radicali

Soluții – Partea I

1. a. **2.** a. **3.** 3. **4.** 3. **5.** -2. **6.** a. **7.** $9\sqrt{2}$. **8.** $3\sqrt{3}$. **9.** 0. **10.** 12. **11.** 1. **12.** $2\sqrt{3}$. **13.** 60. **14.** $\sqrt{3}$. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 10. **17.** 6. **18.** 7. **19.** $(-1;1)$. **20.** 1,4.

Soluții – Partea a II-a

21. ***a)*** $A=(10^n\cdot 2)^2$; ***b)*** $n=0$. **22.** ***a)*** 16,25,36,49,64,81; ***b)*** $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}=\sqrt{11(a+b)}\in\mathbb{N}\Rightarrow a+b$ este pătrat perfect, deci $a+b=11$. Cea mai mică valoare posibilă pentru $\overline{ab}$ este 29. **23.** ***a)*** $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; ***b)*** $C=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, $S=0$; ***c)*** $p=\frac{1}{6}$. **24.** ***b)*** $A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{1,2,3,4\}$; ***b)*** $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A\cap B=\{4\}$, $A-B=\{5,6,7,8\}$, $B-A=\{1,2,3\}$. **25.** ***a)*** $(a+b)+c=a+(b+c)=8\sqrt{3}$; ***b)*** $b-c=3\sqrt{3}$. **26.** ***a)*** $a\cdot b=5$, $a+b=2\sqrt{7}$, deci $a\cdot b<a+b$; ***b)*** $x=\frac{2\sqrt{7}}{5}=\frac{\sqrt{28}}{5}\in\left(\frac{\sqrt{16}}{5};\frac{\sqrt{36}}{5}\right)$. **27.** ***a)*** $a=9, b=8$; ***b)*** $m_a=8,5$. **28.** ***a)*** $x=6\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{5}$; ***b)*** $8<x<9$; ***c)*** $xy=-6\sqrt{10}=-\sqrt{360}$. Concluzia rezultă din faptul că $18=\sqrt{324}<\sqrt{360}<\sqrt{361}=19$. **29.** ***a)*** $a\cdot b=1$; ***b)*** $a^2+b^2=4$; ***c)*** $\frac{b}{a}-\sqrt{3}=2\in\mathbb{N}$. **30.** ***a)*** $x=5, y=2$; ***b)*** $y<x<x^y<y^x$. **31.** $a=4\sqrt{2}-20$, $b=30-3\sqrt{3}$, $3a+2b=12\sqrt{2}-6\sqrt{3}$. **32.** ***b)*** $\sqrt{10}$. **33.** ***b)*** $A=\{-1,1,2,4\}$, $S=6$; ***c)*** $B=\{1\}$. **34.** ***a)*** $u(a)=3\Rightarrow a$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow\sqrt{a}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; ***b)*** $u(5n+3)\in\{3,8\}\Rightarrow 5n+3$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow\sqrt{5n+3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. **35.** ***a)*** $S=\sqrt{n+1}-1$; dacă $n=24\Rightarrow S=4$; ***b)*** $n=624$; ***c)*** $n\in\{2^2-1, 3^2-1,..., 24^2-1\}$. **36.** ***a)*** 1,68 m; ***b)*** $\sqrt{2}=1,4142...\Rightarrow\sqrt{2}<1,68$. **37.** 12 m. **38.** ***a)*** 48 lei și 60 lei; ***b)*** Tricoul costă 44,55 lei, deci le ajung banii. **39.** Laturile terenului au $\frac{64}{19}$ m, $\frac{96}{19}$ m și $\frac{144}{19}$ m. Se arată că cea din mijloc este media geometrică a celorlalte două. **40.** 16,5 kg.

Tema 1.7 Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori

Soluții – Partea I

1. x^2+6x+6. **2.** $4x+5$. **3.** 0. **4.** $6-4\sqrt{3}$. **5.** 1. **6.** 8. **7.** $3+2\sqrt{2}$. **8.** x^4-1. **9.** x^8-256. **10.** 1. **11.** 2. **12.** a. **13.** 5. **14.** 47. **15.** $2(a-b+c)$. **16.** $3(x^3+2x^2-4x+8)$. **17.** $(2x+3)^2$. **18.** $(3x-4y)^2$. **19.** $(x-1)(x+1)(x^2+1)$. **20.** $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* Calcul direct. *b)* $E(-3)=1$; *c)* $E(a)=(a+3)^2+1>0$. **22.** 8. **23.** *a)* Calcul direct. *b)* $E(-1)=-15$; *c)* $E(x)+16=(x+2)^2\geq 0$. **24.** *a)* Calcul direct. *b)* 49; *c)* $E(a)=(2a+1)^2\geq 0$, de unde $E_{min}=0$, care se realizează pentru $a=-\frac{1}{2}$. **25.** *a)* $n=111\cdot(a+b+c)=37\cdot 3\cdot(a+b+c)$; *b)* $n^2=37^2\cdot 3^2\cdot(a+b+c)^2=333\cdot 37\cdot(a+b+c)^2$. **26.** *b)* Din *a)*, $(a-b)^2=8\Rightarrow a-b=-2\sqrt{2}$, deoarece $a<b$, deci $a-b<0$. Rezultă atunci că $(a-b+2\sqrt{2})^{100}=0^{100}=0$. **27.** *a)* 3; *b)* 2; *c)* Avem $(x-y)^2=2\Rightarrow x-y=-\sqrt{2}$, deoarece $x<y$, deci $x-y<0$. Rezultă $\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1<0$.

28. *a)* 1; *b)* $x\cdot y=1\Rightarrow x=\frac{1}{y}=\frac{1}{7+5\sqrt{2}}=\frac{1}{7+\sqrt{50}}<\frac{1}{14}$; *c)* $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=39202\in\mathbb{N}$. **29.** $x=6$. **30.** *a)* $m_g=2\sqrt{3}<4=m_a$; *b)* $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\leq a+b\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\leq 0\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$. **31.** *a)* $\overline{x3}\cdot\overline{x5}+1=(10x+4)^2=\overline{x4}^2$. *b)* $\overline{ab}\in\{11,64,95\}$. **32.** *a)* $a=(3n+1)^2$; *b)* $E_{min}=3$, se obține dacă $x=3$ și $y=-\frac{1}{3}$. **33.** *a)* $p=(y+2)^2+1>0$; *b)* $A_{min}=3$. **34.** *a)* 2; *b)* 4. **35.** *a)* 25, 144; *b)* $n=(2x^2-3x+3)^2$. **36.** *a)* 100; *b)* 75; *c)* 130. **37.** *a)* 25; *b)* $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=13$; *c)* $\frac{11}{6}$. **38.** *a)* 3, 6, 18; *b)* $E=(a+2)^2+2>0$; *c)* $E-11=(a-1)(a+5)$. **39.** *a)* $A=(a+5)^2+1>0$; *b)* $a=-5$, $E_{min}=1$. **40.** *a)* $A=-(2a-3)^2-2<0$; *b)* $a=\frac{3}{2}$, $E_{max}=-2$. **41.** $a+b=\sqrt{3}$. **42.** $a=b=2$. **43.** *a)* Calcul direct; *b)* Din *a)* $\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=0\Rightarrow x=-2,\ y=3$. **44.** *b)* $a=(x+2)^2$. **45.** 30 hm, 32 hm, 59 hm. **46.** $x=3\Rightarrow l=3$ dm, L = 5 dm $\Rightarrow P=16$ dm. **47.** Vlad are 60 lei, Adi are 80 lei. **48.** *a)* 2; *b)* Corina are 9 ani, Raluca are 7 ani. **49.** $x=6$ cm $\Rightarrow P=24$ cm. **50.** *a)* $l=\frac{3a+5}{4}\Rightarrow A=\frac{9a^2+30a+25}{16}$; *b)* $a=9$ dam.

Tema 1.8 Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Soluții – Partea I

1. $\frac{6}{5}$. **2.** -1. **3.** $\{1\}$. **4.** $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. **5.** $\frac{15x^2+5x}{20x^2}$. **6.** $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$. **7.** $3xyz$. **8.** $\frac{x+2}{x-2}$. **9.** $\frac{x+3}{x-3}$. **10.** $\frac{x^2+x+1}{3}$. **11.** $\frac{x+1}{x-3}$. **12.** $\frac{x+3}{x+1}$. **13.** x^2-4. **14.** x. **15.** $-\frac{10x}{3y^4}$. **16.** -1. **17.** $\frac{x-1}{x+1}$. **18.** -1. **19.** 1. **20.** 2.

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. **22.** *a)* 0; *b)* $x=0$. **23.** *a)* $A=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. *b)* $E(x)=6$. **24.** *b)* $x\in\{0,2,3\}$; *c)* $x=3$. **25.** *b)* $|E(x)|=1\Leftrightarrow E(x)=1$ sau $E(x)=-1$. Prima ecuație nu are soluție, iar din a doua rezultă $x=0$. **26.** *b)* $x=1\Rightarrow E(1)=\frac{5}{2}$; *c)* $a=-1$. **27.** *a)* $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;2;3\}$; *b)* $m_g=\frac{2}{9}$. **28.** *b)* $x\in\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; *c)* $S=5350$. **29.** *c)* $x\in\{1;2\}$. **30.** *c)* $x+3$ și $x+4$ sunt numere consecutive, deci produsul lor este par. **31.** *b)* $\frac{1}{n}\cdot E(n)=\frac{2}{n+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\in\{-5;-4;-2;-1\}$, dar $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\varnothing$. *c)* $x\in\{-9,-6,-5,-4,-2;-1\}$. **32.** *b)* $a=-2$. **33.** *b)* $A=\{-1,1,2,4\}$, $S=6$; *c)* $B=\{1\}$. **34.** *c)* $x\in\{-2;0;1\}$. **35.** *b)* $x\in\{-5;-2;-1\}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $x\in\{-6,-5,-2\}$. **36.** *b)* $x\in(-\infty,-4]\cup(1,\infty)$; *c)* $x\in\{-4,-2\}$. **37.** *b)* $a=-3$; *c)* $x=-6$. **38.** *c)* Fie d este un divizor comun al numerelor $8x+3$ şi $5x+2$; atunci d divide $8\cdot(5x+2)-5\cdot(8x+3)=1$. **39.** *a)* $\frac{1}{x-1}$; *d)* $S=2^{41}-1$. **40.** *c)* $a=0$. **41.** *b)* 4; *c)* $x=\frac{2}{3}$. **42.** *b)* $x\in\{1;2\}$; *c)* $x=2$. **43.** *c)* $N=(1+5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+...+(5^{120}+5^{121}+5^{122})=31+31\cdot5^3+...+31\cdot5^{120}=31(1+5^3+...+5^{120})$

44. *a)* $\mathbb{R}-\{-2;-1,1\}$; *b)* $F(x)=\frac{1}{x-1}$; *c)* $x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow E(x)=\frac{1}{x-1}>0$. **45.** *b)* $E(x)=\frac{x-3}{3}$; *c)* $p=0$. **46.** *a)* -6; *b)* $E(x)=x(x+1)(x+2)$; *c)* $E(n)=n(n+1)(n+2)$. Produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 6. **47.** *a)* $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\neq0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci $E(x)$ are sens oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *b)* $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\geq3\Rightarrow\frac{3}{x^2+4x+7}\leq\frac{3}{3}=1$. Deci $E(x)\leq1+1=2$ **(1)**. Evident, $\frac{3}{x^2+4x+7}>0\Rightarrow E(x)>1+0=1$ **(2)**. Din **(1)** şi **(2)** rezultă că $E(x)\in(1;2]$; *c)* Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\Rightarrow[E(x)]=1$. Dacă $x=-2\Rightarrow[E(x)]=2$. **48.** *a)* $\mathbb{R}$; *c)* Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow[E(x)]=6$. Dacă $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow[E(x)]=7$. **49.** *a)* $p=0$; *b)* $a=(x+4)^2$; *c)* Nu există. **50.** *c)* $x\in\varnothing$.

Tema 1.9 Funcţii

Soluţii – Partea I

1. 5. **2.** 6. **3.** A. **4.** $\frac{11}{4}$. **5.** 5. **6.** 3. **7.** $(0,-6)$. **8.** $(4,0)$. **9.** 5. **10.** -4. **11.** 1. **12.** $(3,-4)$. **13.** $(-3,7)$. **14.** $(2,1)$. **15.** 35. **16.** -8. **17.** -6. **18.** $m=1$. **19.** $C(0,-8)$. **20.** $(3;0)$.

Soluţii – Partea a II-a

21. *a)* $m=\pm2$; *b)* $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **22.** $m=3,n=-3$. **23.** *b)* $\sqrt{6}$. **24.** *a)* $a=3,b=1$. **25.** *b)* $(-3;-1)$. **26.** *a)* $(-\infty,-1]$; *b)* $a=-1,b=-1$. **27.** *a)* $\frac{1}{3}$. **28.** *b)* 625. **29.** *a)* $f(\sqrt{2}-1)>f(\sqrt{2})$. **31.** *b)* $(1,-1)$. **32.** *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{3}{2}$. **33.** *a)* $a=-2$. **34.** *b)* $m=20$. **35.** *a)* $(-\infty,1]$; *b)* $f(1)=1\Rightarrow A(1,1)\in G_f$. **36.** *b)* $a=b=1$. **37.** *b)* $a=\pm\frac{11}{4}$. **38.** *b)* $x=\frac{1}{13}$. **39.** *b)* $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **40.** *b)* $\sqrt{5}$. **41.** *b)* $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=4$. **42.** *b)* $C(4,0)$. **43.** *b)* 870. **44.** *b)* $AA'=2\cdot OA=2\sqrt{53}$. **45.** *b)* $\sqrt{5}$. **46.** *b)* $\sqrt{2}$. **47.** *a)* $a=1,b=2$. **48.** *a)* $A\notin G_f$, $B\in G_f$, $C\in G_f$. *b)* $\frac{2}{3}$. **50.** *a)* $a=-2,b=4$; *b)* $2(3+\sqrt{5})$.

Tema 1.10 Ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, al inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii

Soluţii – Partea I

1. $\frac{1}{2}$. **2.** 1. **3.** 13. **4.** 1. **5.** $3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **6.** 4. **7.** $-\sqrt{13}$. **8.** $\frac{4}{7}$. **9.** 0. **10.** $\{...,-10,-9,-8\}$. **11.** $\{...,-13,-12,-11\}$. **12.** $\{-3;-2;-1;0;1\}$. **13.** $-\frac{3}{2}$. **14.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$. **15.** 3. **16.** $\mathbb{R}$. **17.**

$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$. **18.** 2. **19.** 0. **20.** (3;2). **21.** (2,4). **22.** (1,-1). **23.** (1,1). **24.** $(\sqrt{2};\sqrt{3})$. **25.** $(2;6)$.

Soluții – Partea a II-a

26. $x=13$. **27.** $x=\frac{541}{198}=2,7(32)$. **28.** $x\in\{-10;7\}$. **29.** $x=1$. **30.** $x=-\frac{23}{22}$. **31.** $x=-\frac{4}{3}$. **32.** $y\in\{2;4\}$. **33.** $y\in\{-2;3\}$. **34.** $x\in\{-3,3\}$. **35.** $x\in\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. **36.** $x\in\{1;2;3\}$. **37.** $x\in\{0;1;2\}$. **38.** $x\in(-1;3)$. **39.** $x\in\{0;1;2;3;4\}$. **40.** $x\in[-3,\infty)$. **41.** $x\in(-\infty;1)$. **42.** $x\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **43.** $x=0,y=-1$, $(x+y)^{2013}=-1$. **44.** *a)* $(0;2),(2;1),(4;0)$; *b)* $(-4;4)$. **45.** $x=\frac{50}{89}$, $y=\frac{80}{89}$, $(5y-8x)^{2012}=0$. **46.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **47.** *a)* $S=\{(-1;-2),(-1;2),(1;-2),(1;2)\}$; *b)* $(1;2)$. **48.** 256, 30. **49.** 70, 50. **50.** 700. **51.** 4073 kg. **52.** 25 rafturi, 1260 cărți. **53.** 5 mese cu 3 picioare (și 12 cu 4 picioare). **54.** 114, 6. **55.** 24 lăzi mici, 30 lăzi mari. **56.** *a)* 65; *b)* 25. **57.** 32 ani. **58.** Peste 12 ani. **59.** *a)* cu 5 kg; *b)* 245, 180, 175. **60.** *a)* 6 ani; *b)* cu 3 ani.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2. Geometrie

Tema 2.1 Unghiuri. Triunghiuri

Soluții – Partea I

1. $[AC]$. **2.** F. **3.** $\sphericalangle X$ și $\sphericalangle Z$. **4.** $[NP]$. **5.** $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle P$. **6.** $[BA]$ și $[BC]$. **7.** $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$. **8.** $[CA]$ și $[CB]$. **9.** $XZ=10$. **10.** $\sphericalangle Z$. **11.** $BC=9$. **12.** Triunghi echilateral. **13.** $[AB]$. **14.** Triunghi echilateral. **15.** 13. **16.** Isoscel. **17.** 55°. **18.** 60°. **19.** 10. **20.** Isoscel.

Soluții – Partea a II-a

21. Într-un triunghi, laturii mai mare i se opune unghiul mai mare. Unghiul cel mai mare este $\sphericalangle N$, iar cel mai mic este $\sphericalangle P$. **22.** 10 cm. **23.** Fie ΔABC echilateral. Avem că $AB+AC+BC=12$. Dar cele trei laturi sunt egale. Rezultă că $AB=AC=BC=4$ cm. **24.** Fie x cea mai mică latură. Urmează că $x+2$ și $x+4$ sunt următoarele două. Avem că: $x+(x+2)+(x+4)=27$, de unde rezultă că $x=7$. Triunghiul are laturile de 7 cm, 9 cm și 11 cm. **25.** Cazul I: latura de 8 cm este bază. Atunci celelalte două sunt laturile congruente ale triunghiului. Cum suma tuturor este de 22 cm, rezultă că laturile triunghiului sunt de 8 cm, 7 cm și 7 cm. Cazul II: latura de 8 cm este una dintre laturile congruente ale triunghiului isoscel Atunci latura congruentă cu ea este de 8 cm. În consecință baza este de $22-8-8=6$ cm. **26.** Fie x, y și z laturile triunghiului. Avem că: $y=x+2$ și $y=z-1$. De aici rezultă că: $x=y-2$ și $z=y+1$. Înlocuind în $x+y+z=12$ rezultă $y=4$, $x=2$ și $z=5$. **27.** Din $\Delta MAB\equiv\Delta MAD$ (L.U.L.) rezultă $[MB]\equiv[MD]$. **28.** ***a)*** Din $\sphericalangle ECM\equiv\sphericalangle FBN$, $MC=NB$ și $EC=FB$, avem $\Delta ECM\equiv\Delta FBN$ (L.U.L), deci $ME=NF$; ***b)*** $m(\sphericalangle BFN)=m(\sphericalangle CEM)$, deci $\sphericalangle AFN\equiv\sphericalangle AEM$, întrucât au acelaşi suplement; ***c)*** $\Delta AEM\equiv\Delta AFN$ (L.U.L.), deci $AM=AN$. **29.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Cum $m(\sphericalangle B)=45°$, rezultă $m(\sphericalangle C)=45°$, deci triunghiul este isoscel şi $[AB]\equiv[AC]$. Cum una dintre catete este de 10 cm, şi cealaltă catetă are 10 cm. **30.** Fiind isoscel, înălțimea din vârf este şi mediană. Fiind mediana din vârful unghiului drept, ea e jumătate din ipotenuză, adică 6 cm. Deci înălțimea căutată este de 6 cm. **31.** $\Delta OAB\equiv\Delta OBC\equiv\Delta OCA$ conform cazului de congruență L.L.L. Cum $\Delta ABO\equiv\Delta CBO$ (L.L.L.), rezultă $\sphericalangle ABO\equiv\sphericalangle CBO$, de unde $m(\sphericalangle OBC)=30°$. Analog, $m(\sphericalangle OCB)=30°$. Ca urmare, $m(\sphericalangle BOC)=120°$. **32.** $\Delta AMB\equiv\Delta NMC$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[AB]\equiv[CN]$ şi $\Delta AMC\equiv\Delta NMB$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[AC]\equiv[BN]$. **33.** Din $\Delta BAD\equiv\Delta CAD$ rezultă $[BA]\equiv[CA]$ şi $\sphericalangle BDA\equiv\sphericalangle CDA$, deci ΔABC este isoscel, iar $[DA$ este bisectoarea unghiului BDC. **34.** ***a)*** Rezultă din $\Delta ABC\equiv\Delta DCB$. ***b)*** Tot din $\Delta ABC\equiv\Delta DCB$ avem $[AB]\equiv[DC]$, de unde, cum şi $[AD]\equiv[DA]$, rezultă că $\Delta BAD\equiv\Delta CDA$ (L.U.L.). **35.** Avem $\Delta BAD\equiv\Delta CAD$ (U.L.U.) de unde $[AC]\equiv[BD]$ şi $\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle ACD$. **36.** ***a)*** Avem succesiv $BF=BE+EF=CF+EF=CF$; ***b)*** Triunghiul ABC este isoscel, deci $\sphericalangle ABE\equiv\sphericalangle ACF$. Rezultă că $\Delta ABE\equiv\Delta ACF$ (L.U.L.), de unde $[AE]\equiv[AF]$. **37.** Se arată că $\Delta ANP\equiv\Delta BPM\equiv\Delta CMN$ (L.U.L), de unde rezultă că $[NP]\equiv[PM]\equiv[MN]$. **38.** ***a)*** 30°; 5 cm. **39.** Triunghiul este echilateral. **40.** Avem $m(\sphericalangle QMP)=m(\sphericalangle NMR)=m(\sphericalangle NMP)+60°$. Atunci $\Delta QMP\equiv\Delta NMR$ (L.U.L.) de unde $[QP]\equiv[NR]$. **41.** În ΔABM, cum $AM<BM$, rezultă $m(\sphericalangle B)<m(\sphericalangle BAM)$. În ΔACM, din $AM<CM$, rezultă $m(\sphericalangle C)<m(\sphericalangle CAM)$. Atunci $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle BAM)+m(\sphericalangle CAM)>m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle B)=180°-m(\sphericalangle A)$, adică $m(\sphericalangle A)>180°-m(\sphericalangle A)\Rightarrow 2m(\sphericalangle A)>180°\Rightarrow m(\sphericalangle A)>90°$, deci ΔABC este obtuzunghic. **42.** ***a)*** $\Delta MBC\equiv\Delta NCB$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Delta DBC\equiv\Delta ECB$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $DB=CE$. ***b)*** Din $\Delta MBC\equiv\Delta NCB$ rezultă $\sphericalangle BMC\equiv\sphericalangle CNB\Rightarrow\sphericalangle AMD\equiv\sphericalangle AME$ (opuse la vârf) $\Rightarrow$ $\Delta AMD\equiv\Delta ANE$ (L.U.L.), de unde $AD=AE$. ***c)*** $\Delta ABO\equiv\Delta ACO$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAO\equiv\sphericalangle CAO$. ***d)*** Din $\Delta ADN\equiv\Delta AEM$ (L.U.L.) obținem $DN=ME$.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.2 Patrulatere

Soluții – Partea I

1. 360°. **2.** 170°. **3.** 34 cm. **4.** 133° . **5.** 60 cm^2. **6.** 30°. **7.** 9 cm^2. **8.** 20 cm^2. **9.** 50 cm. **10.** 3 mm. **11.** 14 cm. **12.** 144 dm^2. **13.** 48 cm^2. **14.** 2 cm. **15.** 27 cm^2. **16.** 54 cm^2. **17.** 9 cm. **18.** 70 cm^2. **19.** 24 cm. **20.** 20 cm.

Soluții – Partea a II-a

21. ***a)*** 45°, 60°, 120°, 135°; ***b)*** 36°, 72°, 108°, 144°. **22.** 57 cm. **23.** 4,4 m. **24.** ***a)*** 24 cm; ***b)*** 60°. **25.** ***a)*** 72 cm^2; ***b)*** 18 cm^2. **26.** ***a)*** 36 cm^2; ***b)*** $A_{ABCD}=72\text{ cm}^2$, $A_{\Delta NOC}=\frac{1}{2}A_{\Delta DOC}=9\text{ cm}^2$. **27.** ***a)*** $L=18$ m, $l=6$ m ; ***b)*** $A=108\text{ m}^2=1{,}08$ ari <2 ari . **28.** ***b)*** Se arată că diagonalele se înjumătățesc. **29.** 160°. **30.** ***a)*** Se arată că ΔABD este echilateral. **31.** ***a)*** $A=1{,}5\text{ m}^2$; ***b)*** 60 cm . **32.** ***a)*** $L=20$ cm, $l=12$ cm ; ***b)*** $A=240\text{ cm}^2$. **33.** ***a)*** $A=6$ cm ; ***b)*** 72 cm^2 . **34.** $m(\sphericalangle BMD)=45^0$, $m(\sphericalangle BDM)=m(\sphericalangle DBM)=67^0 30'$. **35.** ***a)*** 8 cm ; ***b)*** 60 cm^2 . **36.** ***a)*** $3\sqrt{2}$ m ; ***b)*** 72 m^2 . **37.** 64 cm^2 . **38.** ***a)*** 8,5 cm ; ***b)*** 27 cm . **39.** ***a)*** $\frac{15}{2}$ cm ; ***b)*** $\frac{585}{4}$ cm^2 . **40.** ***b)*** 216 cm^2 . **41.** ***a)*** 40 m^2 ; ***b)*** 400 . **42.** ***b)*** $d=2\sqrt{10}\text{ m}>6$ m ; ***c)*** Sunt necesari 3,6 l de vopsea, deci trebuie cumpărate minim 4 cutii de 1 litru. **44.** ***a)*** 600 cm^2 ; ***b)*** Da. **45.** ***a)*** 12,5 m^2 ; ***b)*** 1,5 dm ; ***c)*** 556 plăci. **46.** ***a)*** 4 m^2 ; ***b)***80 lei. **47.** ***b)*** $L_{gard}=80\text{ m}\ \frac{3}{x^2+4x+7}\le\frac{3}{3}=1$. ***c)*** $d_{max}=\text{diagonala}=\sqrt{1088}\text{ m}<33$ m . **48.** ***a)*** 800 m^2 ; ***b)*** 300 m^2 ; ***c)*** 1500 kg . **49.** ***a)*** 70 cm ; ***b)*** 70 plăci. **50.** ***a)*** 20 stâlpi; ***b)*** 200 m.

Tema 2.3 Asemănare

Soluții – Partea I

1. 1. **2.** proporționale. **3.** ... congruente ... proporționale. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** pătratul. **6.** ***a)*** $\frac{2}{5}$; ***b)*** $\frac{3}{2}$; ***c)*** 6; ***d)*** 20. **7.** ***a)*** 6; ***b)*** 30; ***c)*** 12; ***d)*** 30. **8.** ***a)*** 24; ***b)*** 3; ***c)*** 36; ***d)*** 4. **9.** ***a)*** nu; ***b)*** da. **10.** 20. **11.** 3. **12.** 18. **13.** $AB=12$ cm, $AC=20$ cm, $BC=16$ cm. **14.** 35°, 73°, 72°. **15.** 93°. **16.** 15 cm, 75°. **17.** 42. **18.** 38. **19.** 3,5. **20.** 17. **21.** 9,6. **22.** $AC=10$ cm, $DE=9$ cm. **23.** 11. **24.** ***a)*** 2; ***b)*** 2 cm^2. **25.** 3.

Soluții – Partea a II-a

26. ***a)*** $[FG],[DE]$ și $[MN]$ sunt linii mijlocii în ΔADE, ΔABC, respectiv în trapezul $BCED$; ***b)*** $BC=12$ cm , $MN=9$ cm , $FG=3$ cm . **27.** ***a)*** $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\overset{R.Thales}{\Rightarrow} DE\parallel BC$; ***b)*** $DE=4$ cm . **28.** Baza mare are 35 cm, iar baza mică 19 cm. **29.** ***a)*** $CD=10$ cm; ***b)*** $CQ\parallel RN\parallel BP$, $[CN]\equiv[NB]\overset{T.P.E.}{\Rightarrow}[QR]\equiv[RP]$, deci R este mijlocul lui $[PQ]$. **30.** ***a)*** Se aplică teorema lui Thales: $DC\parallel AB\Rightarrow\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}\Rightarrow\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD}$; ***b)*** $DC\parallel AB\Rightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{MB}{MD}$. **31.** ***a)*** $DE\parallel BC$; ***b)*** $DE\not\parallel BC$; ***c)*** $DE\not\parallel BC$. **32.** $NC=12$ cm ; $BC=20$ cm ; $AB=10$ cm .

33. $NP\parallel AC\overset{T.Thales}{\Rightarrow}\frac{BP}{PC}=\frac{BN}{NO}=\frac{BM}{MA}=4$, $\{O\}=AC\cap BD$; $\frac{BN}{NO}=4\Rightarrow\frac{BN}{BO}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{BN}{BD}=\frac{2}{5}$. **34.** ***a)*** $[BD$ bisectoarea $\sphericalangle ABC\overset{T\,bis}{\Rightarrow}\frac{BC}{BA}=\frac{CD}{DA}\Rightarrow AD=10$ cm; $DC=16$ cm; ***b)*** $BC=18$ cm. **35.** ***a)*** 12 cm; ***b)*** $AO=12$ cm , $OC=4$ cm . **36.** $AM=18$ cm , $MB=30$ cm . **37.** ***a)*** $AB=8$ cm ; ***b)*** $\frac{1}{2}$. **38.**

Scanned with OKEN Scanner

a) $BD = 6$ cm, $CD = 4$ cm ; *b)* $P_{ABDE} = 22{,}2$ cm. **39.** $MB = 6$ cm, $AN = 2$ cm, $AC = 6$ cm. **40.** *a)* $MN \parallel BC, NP \parallel AB \Rightarrow MNPB$ paralelogram; *b)* $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (1). $NP \parallel AB \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{NC}{AC}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{AM}{AB} + \frac{PC}{BC} = \frac{AN+NC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$. **41.** *a)* $\frac{AM}{AB} = \frac{NC}{BC} \Rightarrow MN \parallel AC$; *b)* $\frac{3}{5}$. **42.** *a)* $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC$; *b)* $DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DE}{12} \Rightarrow DE = 4$ cm. **43.** *a)* $AB \parallel NP$ (1), $NA \cap PB = \{M\} \Rightarrow NA \not\parallel BP$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow ABPN$ trapez; *b)* $\frac{MA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow MA = 2k$, $AN = 3k$, $k \in \mathbb{Q}_+$, $MA + AN = MN \Rightarrow 5k = 15$ cm $\Rightarrow k = 3$ cm $\Rightarrow MA = 6$ cm, $AN = 9$ cm ; $AB \parallel NP \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP} = \frac{AB}{NP}$; $\frac{6}{15} = \frac{MB}{20} = \frac{AB}{13{,}5} \Rightarrow MB = 8$ cm, $AB = 5{,}4$ cm, $P_{\Delta MAB} = 19{,}4$ cm ; $P_{ABPN} = 39{,}9$ cm. **44.** *a)* $AG = \frac{2}{3}AM = 6$ cm, $GP \parallel BC \Rightarrow \Delta AGP \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{GP}{MC} \Rightarrow GP = 4$ cm ; *b)* $\Delta NGP \sim \Delta NBC \Rightarrow \frac{NG}{NB} = \frac{GP}{BC} = \frac{NP}{NC} \Rightarrow NP = 5$ cm. **45.** *a)* $ADA'E$ romb; *b)* $A'D = AD = AE = A'E = x$; $A'D \parallel AC \Rightarrow \Delta BA'D \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{A'D}{AC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{12-x}{12} \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7{,}2$ cm $\Rightarrow P_{ADA'E} = 28{,}8$ cm. **46.** Se demonstrează că $ADEF$ paralelogram. $DE \parallel AC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow DE = \frac{15}{2}$ cm $= 7{,}5$ cm; $P_{ADEF} = 25$ cm. **47.** *a)* $FD \parallel BC$, $DE \parallel AB \Rightarrow BEDF$ paralelogram $\Rightarrow FD = BE$. $FD \parallel BC \Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{BE}{BC}$. *b)* $\Delta AFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AC}$ (1), $\Delta CED \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = \frac{AD+CD}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$. **48.** *a)* $OE \parallel AB \Rightarrow \Delta OED \sim \Delta BAD \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD}$ (1) $OE \parallel CD \Rightarrow \Delta AEO \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{OE}{CD} = \frac{AE}{AD}$ (2). Atunci $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = \frac{DE+AE}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$; *b)* $EF = OE + OF$. Ca şi la punctul *a)*, se arată că $\frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} = 1$. Atunci $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} = 1+1$, adică $\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 2$. **49.** *a)* $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{BAC})$, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC}) \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC$; *b)* $AD = 6$ cm, $AE = \frac{36}{5} = 7{,}2$ cm. **50.** $m(\hat{A}) = 78^0 \Rightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = \frac{180^0 - 78^0}{2} = 51^0 =$ $m(\hat{P}) = m(\hat{N}) \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta MNP$. **51.** *a)* $DE \parallel BC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{11}$; *b)* $x = 8$. **52.** *a)* $DF \parallel BC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB}$; *b)* $DE \parallel AC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta BED \sim \Delta BCA$; *c)* $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$. **53.** *a)* $[MP]$ este linie mijlocie în $\Delta CBN \Rightarrow BN = 2MP$; *b)* $MP \parallel AN, MP = AN \Rightarrow APMN$ paralelogram (1). Se arată că ΔMNB este dreptunghic în M, $m(\hat{B}) = 30^0 \Rightarrow MN = \frac{BN}{2} = AN$ (2).Din (1) şi (2) rezultă că $APMN$

Scanned with OKEN Scanner

este romb. **54.** *a)* $m(\widehat{ACB}) = 90^0 - m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}) \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{ABC}$ şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACB} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABD \sim \Delta CBA$; *b)* $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DAC}$ şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DCA} \overset{U.U.}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta CAD$; *c)* $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{DCA} \equiv \widehat{ACB} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ADC \sim \Delta BAC$. **55.** *a)* $m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ABC}) = 36^0$, $m(\widehat{BDC}) = 180^0 - (36^0 + 72^0) = 72^0 \Rightarrow \widehat{BDC} \equiv \widehat{BCD} \Rightarrow$ ΔDBC isoscel; *b)* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DBC}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BDC} \overset{U.U.}{\Rightarrow}$ $\Delta ABC \sim \Delta BDC$. **56.** *a)* $BD = 4$ cm, $CD = 5$ cm; *b)* $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{4}{5}$. **57.** *a)* Se arată că $[AM]$ este linie mijlocie în ΔBNC; *b)* $AM \parallel NC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow}$ $\Delta PAM \sim \Delta PCN \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{NC} = \frac{1}{2}$. Deci $PC = 2AP$. **58.** $P_{DEF} = 11{,}5$ cm. **59.** *a)* $BD = 6$ cm, $DC = 9$ cm; *b)* $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{2}{3}$. **60.** $\Delta ABM \sim \Delta DNM \Rightarrow \frac{AB}{DN} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}$, $\frac{AB}{DN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{DN + AB} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{AB}{NC} = \frac{3}{5}$. $\Delta ABP \sim \Delta CNP \Rightarrow \frac{AB}{NC} = \frac{BP}{PN} = \frac{AP}{CP} = \frac{3}{5}$, $AM \parallel BC \Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta CBP \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{MP}{BP} \Rightarrow MP = \frac{3}{5} BP$; $\frac{BM}{MN} = \frac{AB}{ND} = \frac{3}{2}$, $\frac{BP + PM}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BP + \frac{3}{5}BP}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{8}{5}BP}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BP}{MN} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$.

Tema 2.4 Relaţii metrice

Soluţii – Partea I

1. 2 cm. **2.** 8 cm. **3.** 12 cm. **4.** 10 cm. **5.** 2 dm. **6.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **7.** 90^0. **8.** 6 cm^2. **9.** 20 cm^2. **10.** $\frac{36}{5}$ cm. **11.** $72\sqrt{3}$ cm^2. **12.** 0. **13.** $-\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{1}{4}$. **15.** $\sqrt{3}$. **16.** $\frac{7}{5}$. **17.** 9. **18.** 15 cm^2. **19.** $\frac{24}{25}$. **20.** 12 cm.

Soluţii – Partea a II-a

21. *b)* 14 cm, 21 cm. **22.** $21(\sqrt{2}+1)$ cm. **23.** $4\sqrt{3}$ cm. **24.** *a)* $3(\sqrt{6}+\sqrt{3}+3)$ cm; *b)* $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ cm^2. **25.** *a)* $10(\sqrt{3}+3)$ cm; *b)* $100\sqrt{3}$ cm^2. **26.** *a)* 4,8 cm; *b)* 96 cm^2. **27.** *a)* $4\sqrt{3}$ cm; *b)* 40 cm. **28.** 60 cm. **29.** *a)* 12 cm; *b)* $3\sqrt{3}$ cm. **30.** *a)* 6 cm; *b)* $3\sqrt{5}$ cm. **31.** *b)* $P_{ABC} = 6(2\sqrt{7}+1)$ cm. **32.** *a)* dreptunghic în B; *b)* $\frac{3}{5}$; *c)* $5\sqrt{13}$ cm. **33.** *a)* $P_{ABCD} = 2\sqrt{3}(4+2\sqrt{2})$ cm; *b)* $\frac{1}{2}$. **34.** *a)* 36 cm; *b)* $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{5}{4}$. **35.** *a)* $AB = 2\sqrt{13}$ cm, $AC = 3\sqrt{13}$ cm, $BC = 13$ cm; *b)* $\sin C + \cos C = \frac{5\sqrt{13}}{13}$. **36.** *a)* $32\sqrt{3}$ cm^2; *b)* $4\sqrt{13}$ cm; *c)* $8\sqrt{3}$ cm. **37.** *a)* $A_{ABCD} = 2A_{ABD} = 50\sqrt{3}$ cm^2; *b)* $m(\sphericalangle EBN) = 60^0$; *c)* ΔEBN este echilateral de latură 10 cm, deci $A_{EBN} = 25\sqrt{3}$ cm^2. Atunci $A_{ADCMNEF} = 25(8+3\sqrt{3})$ cm^2. **38.** *a)* $A = 12\sqrt{5}$ m^2; *b)* $x = 3$ m. **39.** *a)* 10 cm; *b)* $x = 1$ cm. **40.** *a)* $A_{AEF} = A_{ABCD} - A_{CEF} - 2A_{ADF} = \frac{a^2}{2}$; *b)* $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **41.** *b)* 15 m; *c)* 2

Scanned with OKEN Scanner

minute și 30 secunde. **42.** Aria pătratului este 14400 cm², deci pentru vopsirea unei fețe se consumă 960 g de vopsea. Pentru vopsirea tablei este nevoie de 1,920 kg vopsea. **43.** *a)* $150\,\text{pași/min} \times 0{,}8\,\text{m} = 120\,\text{m/min} = 2\,\text{m/s}$; *b)* Diagonala pieței are lungimea $d = 40\,\text{s} \cdot 2\,\text{m/s} = 80\,\text{m}$, deci lungimea laturii pieței este $40\sqrt{2}$ m. Aria pieței este $3200\,\text{m}^2$; *c)* Aria unei dale este $25 \cdot 80 = 2000\,\text{cm}^2 = 0{,}2\,\text{m}^2$. Sunt necesare 16000 de dale. **44.** *b)* $18{,}75\ \text{m}^2$; *c)* $P_{DEBC} = 87{,}5$ m. **45.** *a)* $450\ \text{m}^2$; *b)* $L_{gard} = 49\sqrt{2}\ \text{m} \simeq 69{,}09$ m. Prețul va fi 2963,6 lei, deci sunt suficienți 3000 lei. **46.** *a)* 4 m și 6 m; *b)* $14{,}4\ \text{m}^2$; *c)* l_{cablu} = diagonala $= 2\sqrt{13}\ \text{m} > 7\ \text{m} \Rightarrow$ nu sunt suficienți 7 m de cablu. **47.** *a)* 8 m; *b)* 2 m; *c)* 3,75 m. **48.** *a)* 15 cm; *b)* $72\ \text{cm}^2$; *c)* $A_{DMB} = 25\%A_{DCB}$. **49.** *b)* $100 \cdot A_{gresie} = 1{,}6608\ \text{m}^2$. $A_{baie} = 3{,}75\ \text{m}^2 \Rightarrow$ nu sunt suficiente. **50.** *a)* $48\sqrt{3}\ \text{m}^2$; *b)* $84\ \text{m}^2$; *c)* 3570 lei.

Tema 2.5 Cercul

Soluții – Partea I

1. 60°. **2.** 90°. **3.** $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **4.** 30°. **5.** mediatoarelor. **6.** bisectoarelor. **7.** echilateral. **8.** $2\sqrt{3}$ cm. **9.** $2\sqrt{3}$ cm. **10.** 5 cm. **11.** $10\sqrt{2}$ cm. **12.** $225\pi\ \text{cm}^2$. **13.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. **14.** 6 cm. **15.** $10\sqrt{2}$ cm. **16.** $\frac{8\pi}{3}$ cm. **17.** $(36-9\pi)\ \text{cm}^2$. **18.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ cm. **19.** 12 cm. **20.** $4\pi\ \text{cm}^2$.

Soluții – Partea a II-a

21. 20 cm. **22.** 30°. **23.** *a)* $10\sqrt{2}$; *b)* $5\sqrt{2}$. **24.** *a)* $4\sqrt{3}$ cm; *b)* 6 cm. **25.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **26.** *a)* 5; *b)* 4π cm. **27.** *a)* $\frac{15}{2}$; *b)* 2 cm. **28.** *a)* 12 cm; *b)* $A = 720\ \text{cm}^2$, $P = 120$ cm. **29.** $R = \frac{13}{2}$ cm, $r = 2$ cm. **30.** $x = 2\sqrt{5}$ cm. **31.** Fie O_1, O_2 centrele cercurilor, AB punctele de intersecție ale cercurilor și $[T_1T_2]$ o tangentă comună. Patrulaterul $O_1T_1T_2O_2$ este trapez dreptunghic și $O_1O_2^2 = MN^2 + (O_1T_1 - O_2T_2)^2$, deci $O_1O_2 = 13$ cm. Notând $\{P\} = AB \cap O_1O_2$, rezultă că AP este înălțime în triunghiul AO_1O_2. Folosind eventual formula lui Heron, deducem că $\mathcal{A}_{AO_1O_2} = 6\sqrt{30}$ cm. Se obține $AB = 2AP = \frac{24\sqrt{30}}{13}$ cm.

32. $8\sqrt{3}$ cm. **33.** *a)* $R = 15$ cm, $d = 24$ cm. **34.** 4 cm. **35.** 10 cm. **36.** $5\sqrt{2}$ cm. **37.** $l = 15$ mm, $D = 5\sqrt{3}$ mm. **38.** $D = 15\sqrt{2}$ cm. **39.** Lungimea cerută este dublul tangentei exterioare comune a celor două cercuri. Cu notațiile din rezolvarea problemei **31.** avem $T_1T_2^2 = O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2$, de unde se obține că $T_1T_2 = 40$ cm. **40.** Fie $\{M\} = AD \cap BC$; atunci $AM = 2$ cm, $OM = 8$ cm, $BM = 6$ cm, $AB = AC = 2\sqrt{10}$ cm și $BD = CD = 6\sqrt{10}$ cm. Se obține $\mathcal{P}_{ABDC} = 16\sqrt{10}$ cm și $\mathcal{A} = 120\ \text{cm}^2$.

Tema 2.6 Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu

Soluții – Partea I

1. 6. **2.** 6. **3.** *a)* 5; *b)* 10. **4.** *a)* 1; *b)* 20. **5.** *F*. **6.** *a)* *F*; *b)* *F*, corect ar fi $BD \subset (ABD)$; *c)* *A*; *d)* *F*. **7.** *a)* *A*; *b)* *F*; *c)* *F*. **8.** *a)* $2\sqrt{2}$ cm; *b)* $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ cm; *c)* $\sqrt{2}$ cm; *d)* $\sqrt{2}$ cm. **9.** *a)* $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm; *b)* $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm; *c)* $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ cm; *d)* 3 cm. **10.** *a)* $4\sqrt{2}$ cm; *b)* $2\sqrt{6}$ cm; *c)* 4 cm; *d)* $2\sqrt{6}$ cm;

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm . **11.** *a)* $3\sqrt{7}$ cm ; *b)* $3\sqrt{3}$ cm . **12.** *a)* $\sqrt{6}$ cm ; *b)* 2 cm . **13.** *a)* $\frac{\sqrt{601}}{5}$ cm ; *b)* $\sqrt{37}$ cm ; *c)* 8 cm ; *d)* $\frac{8\sqrt{65}}{5}$ cm . **14.** *a)* $2\sqrt{6}$ cm ; *b)* 4 cm ; *c)* $4\sqrt{2}$ cm ; *d)* $2\sqrt{2}$ cm . **15.** *a)* $\sqrt{3}$ cm ; *b)* $\sqrt{3}$ cm ; *d)* 2 cm . **17.** *a)* A ; *b)* F ; *c)* A ; *d)* A ; *e)* A . **18.** *a)* B' ; *b)* A ; *c)* $[CC']$; *d)* CD ; *e)* $[AC]$; *f)* $[BC']$. **20.** *b)* $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ cm^2 ; *c)* $3\sqrt{3}$ cm ; *d)* $\frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm .

Soluții – Partea a II-a

21. *a)* $3\sqrt{3}$ cm ; *b)* $[MS]$ este linie mijlocie în $\Delta BVC \Rightarrow MS \parallel VC, VC \subset (VAC) \Rightarrow MS \parallel (VAC)$; *c)* 60^0 ; *d)* 45^0 . **22.** *a)* $BM = 2,(6)$ cm ; *b)* $\cos(\sphericalangle BOM) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **23.** *a)* P este mijlocul segmentului $[AC]$; *b)* Dacă P este mijlocul segmentului $[AC]$, atunci în triunghiul MNP, $MN < NP + MP = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. **24.** $BB' = 5$ cm . **25.** *a)* În triunghiul ACD', $[AQ]$, $[CP]$ și $[D'O]$ sunt mediane; *b)* $AB = \sqrt{30}$ cm. **26.** *a)* $TQ \parallel BC \Rightarrow m(\sphericalangle TQ, BC) = 0^0$; *b)* $P_{TQCB} = \frac{68}{3}$ cm $A_{TQCB} = \frac{64}{3}$ cm^2 . **27.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **28.** *a)* Fie $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$. În $\Delta CB'D'$, $[OO']$ este linie mijlocie, $CD' \parallel OO' \Rightarrow \cos(\sphericalangle AO; CD') = \cos(\sphericalangle AOO')$. Dacă $AT \perp OO'$, $T \in (OO')$, atunci $AO = AO' = 4\sqrt{6}$ și $OT = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cos(\sphericalangle AOO') = \frac{OT}{AO} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. *b)* Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **29.** $\Delta A'BC'$ este echilateral $\Rightarrow L^2 + l^2 = h^2 + L^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow L = l = h$.

30. *a)* Deoarece $BC \parallel AD$ și $AD \subset (MAD)$, rezultă $BC \parallel (MAD)$. *b)* Cum $BD \perp AC$ și $BD \perp AM$, rezultă $BD \perp (MAC)$. *c)* $CB \perp AB$ și $CB \perp AM$ implică $CB \perp (MAB)$, deci $d(C;(MAB)) = CB$. **31.** Cu reciproca teoremei lui Thales se arată că $G_1G_2 \parallel AC$. **32.** *a)* Deoarece segmentul (OO') este linie mijlocie în triunghiul $\Delta ACB' \Rightarrow OO' \parallel AB', AB' \subset (AA'B') \Rightarrow OO' \parallel (AA'B')$. *b)* Dacă $A'C' \cap B'D' = \{S\} \Rightarrow$ patrulaterul $BOD'S$ paralelogram $\Rightarrow D'O \parallel SB, SB \subset (A'BC') \Rightarrow D'O \parallel (A'BC')$. *c)* $OO' \parallel AB'$ și $AB' \perp (A'D'C) \Rightarrow OO' \perp (A'D'C)$. **33.** *a)* Fie $AB = l$. Avem $BO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ și, aplicând teorema catetei în triunghiul DOB, dreptunghic în O, obținem $OB^2 = BM \cdot BD \Rightarrow BM = \frac{l}{3}$. Fie $CS \perp BD, S \in (BD)$. Întrucât CS este înălțime în triunghiul echilateral DBC, rezultă $CS = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $SM = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$. În ΔSMC , $m(\sphericalangle MSC) = 90°$, din teorema lui Pitagora rezultă $SM^2 + SC^2 = MC^2$, de unde $l = 6$. *b)* Fie $T \in (AB)$ astfel încât $BT = 2 \Rightarrow MC = CT = 2\sqrt{7}$ cm și $MT = 2$ cm. Rezultă $\cos(\widehat{CM, AD}) = \cos(\widehat{CMT}) = \frac{\sqrt{7}}{14}$. **34.** Fie $AM \cap BC = \{S\}$ și $AN \cap CD = \{T\}$. Triunghiul ΔABS isoscel, deci $AM = MS$. Triunghiul ΔACT isoscel, deci $AN = NT$. În concluzie, segmentul (MN) este linie mijlocie în triunghiul $\Delta AST \Rightarrow MN \parallel ST, ST \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$. **35.** Dacă $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow$ segmentul (MO) este linie mijlocie în triunghiul $\Delta AEC \Rightarrow EC \parallel MO, MO \subset (MDB) \Rightarrow EC \parallel (MDB)$. **37.** *a)* În ΔABM avem: $AM^2 = 16 + 4 = 20$, iar în ΔAMN: $MN^2 = 20 + 4$, deci $MN = 2\sqrt{6}$ cm. ΔMNP este echilateral, deci aria sa este $6\sqrt{3}$ cm^2. b) În

ΔBCD, [OM] este linie mijlocie, deci $OM=\frac{CD}{2}$ şi $OM \| CD$. Dar $PD'=\frac{C'D'}{2}=\frac{CD}{2}$ şi $PD' \| CD$. Deci, $PD'OM$ este paralelogram. *c)* Fie T mijlocul laturii [B'C']. În trapezul A'NMT, TA'∩MN={S}. Deoarece A'N||TM şi $2\cdot NA'=TM \Rightarrow [A'N]$ este linie mijlocie în $\Delta MST \Rightarrow$ TA'=A'S. Din MN∩TA'={S} şi TA'⊂(A'B'C'), avem că: {S}=(A'B'C')∩*MN*. În figura alăturată, SQ⊥B'C', Q∈C'B'. [A'B'] este linie mijlocie în $\Delta STQ \Rightarrow$ SQ=2·A'B'=8 cm şi C'Q=6 cm. În $\Delta SC'Q$, avem SC'=10 cm. **37.** *a)* Fie $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow (MO)$ linie mijlocie în trapezul $ACGE \Rightarrow MO = 6$ cm şi $MO \perp (ABC)$. Analog $NO = 7$ cm şi $NO \perp (ABC)$. Obţinem $M \neq N$. *b)* $MO \perp (ABC)$ şi $NO \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$. **38.** *a)* Dacă M, P, Q sunt mijloacele laturilor $AB, BC, AC \Rightarrow$ $\frac{DG_3}{DM}=\frac{DG_1}{DP}=\frac{DG_2}{DQ}=\frac{2}{3} \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} G_1G_2, G_1G_3 \| (ABC) \Rightarrow (G_1G_2G_3) \| (ABC)$. *b)* $\frac{G_1G_3}{AC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{ABC}}=\frac{1}{9}$. **39.** Fie *S* şi *P* mijloacele muchiilor (*EF*), (*AD*) şi $AS \cap BC = \{T\} \Rightarrow T$ este mijlocul segmentului (*AT*). În triunghiul ΔATD, (*SP*) este linie mijlocie $\Rightarrow SP \| TD, TD \subset (BCD) \Rightarrow SP \| (BCD)$. **40.** Dacă $AB = a$ şi $AE = x \Rightarrow DH = \sqrt{2a^2 + x^2}$ şi $CH = \sqrt{2a^2 + (a-x)^2}$. Se obţine ecuaţia $\frac{2a^2 + x^2}{3a^2 - 2ax + x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = a\left(\sqrt{10} - 3\right)$. Avem $\frac{AE}{EB} = \frac{\sqrt{10} - 2}{6}$. **41.** *a)* Dacă T este mijlocul segmentului (RD) obţinem din teorema lui Thales $\frac{AR}{RD} = \frac{2}{3}$ şi cum $\frac{AM}{MG} = 2 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{RA}{RD}$. *b)* $\frac{AR}{RD} = \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3} \Rightarrow (PQR) \| (BCD)$. **42.** *a)* $BQ \| MD$ şi $QO \| DP \Rightarrow (DPM) \| (QOB)$. *b)* $\sin(\sphericalangle BQ; D'C') = \sin(\sphericalangle ABD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. *c)* $d((DPM);(QOB)) = 4$ cm. **43.** Fie O' centrul de greutate al triunghiului ΔABD. Din reciproca teoremei lui Thales avem $OO' \| CD \Rightarrow m(\sphericalangle OM; CD) = m(\sphericalangle O'OM)$. Deoarece $OM = 3$ cm, $OO' = 2$ cm şi $MO' = \sqrt{3}$ cm obţinem $\cos(\sphericalangle MOO') = \frac{5}{6}$. **44.** *a)* Cu teorema lui Pitagora în triunghiul $AA'G$ obţinem $A'G = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AB = 6$ cm. b) Dacă $\{O\} = AB' \cap A'B$, atunci (OP) linie mijlocie în triunghiul $\Delta AB'C' \Rightarrow AC' \| OP, OP \subset (A'BP) \Rightarrow AC' \| (A'BP)$. **45.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **46.** *a)* $P_{BA'C} = 41 + 7\sqrt{31} + 9\sqrt{2}$ cm, $A_{BA'C} = \frac{63\sqrt{62}}{2}$ cm^2. **47.** *a)* 2 cm; *b)* 45°; *c)* (OO') linie mijlocie în triunghiul $\Delta A'BC' \Rightarrow OO' \| A'B \Rightarrow OO' \| (BCD')$. În aceste condiţii lungimea proiecţiei segmentului $[OO']$ pe planul (BCD') este egală cu lungimea segmentului $[OO']$, adică $2\sqrt{2}$ cm. **48.** *a)* $\sqrt{22}$ cm; *b)* $3\sqrt{2}$ cm; *c)* $\frac{\sqrt{330}}{5}$ cm; *d)* 2 cm. **49.** *a)* $d(S; BD) = 2\sqrt{7}$ cm; *b)* $d(S; CD) = 2\sqrt{7}$ cm; *c)* În triunghiul ΔACS, $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AS = 4$ cm şi $SC = 8$ cm $\Rightarrow m(\sphericalangle SC; (ABC)) = 30^\circ$. *d)* $d(A; (SDC)) = \frac{4\sqrt{21}}{7}$ cm. **50.** *a)* Triunghiul ΔMAO, $\{O\} = AC \cap BD$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle(MBD); (ABC)) = 45^\circ$. *b)* $m(\sphericalangle(MBD); (TBD)) = 45^\circ$. *c)* $tg(\sphericalangle(MBC); (ABC)) = \sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Tema 2.7 Corpuri geometrice. Arii şi volume

Soluţii – Partea I

1. $108\ cm^2$. **2.** $90\sqrt{3}\,cm^3$. **3.** $16(\sqrt{3}+1)\ cm^2$. **4.** $216\ cm^3$. **5.** $24\ cm^2$. **6.** $36\ cm^2$. **7.** $120\ cm^2$. **8.** $75\sqrt{3}\ cm^3$. **9.** $(216+32\sqrt{3})\ cm^2$. **10.** $144\ cm^2$. **11.** $200\ cm^2$. **12.** $1000\sqrt{6}\ cm^3$. **13.** $72\sqrt{3}\ cm^2$. **14.** $16\sqrt{6}\ cm^3$. **15.** $54\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)\ cm^2$. **16.** $36\sqrt{3}\ cm^2$. **17.** $128\sqrt{2}\ cm^2$. **18.** $384\ cm^2$. **19.** $36\sqrt{3}\ cm^2$. **20.** $324\ m^3$.

Soluţii – Partea a II-a

21. ***a)*** $V_{cub}=l^3\Rightarrow l=5cm\Rightarrow A_{t\,cub}=150cm^2$; ***b)*** $V_{OA'B'C'D'}=\frac{125}{3}cm^3$.

22. ***a)*** $A_t=2\cdot L\cdot l+2\cdot L\cdot h+2\cdot l\cdot h=(16\sqrt{3}+8)cm^2$; ***b)*** $V=L\cdot l\cdot h=8\sqrt{3}\,cm^3$. **23.** ***a)*** Din $BC\perp AM$ şi $BC\perp VM$ rezultă $BC\perp(VAM)$, de unde $BC\perp VA$. ***b)*** $VO=2\sqrt{6}$ cm $\Rightarrow V=18\sqrt{2}\,cm^3$. **24.** ***a)*** $54\sqrt{3}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot l\Rightarrow l^3=216\Rightarrow l=6cm$. ***b)*** $A_t=(108+18\sqrt{3})cm^2$.

25. ***a)*** $V=A_b\cdot h=36\cdot 7=252cm^3$. ***b)*** $A_t=A_l+2\cdot A_b=168+72=240cm^2$.

26. ***a)*** $\operatorname{tg}60^\circ=\frac{12}{a_b}\Rightarrow a_b=4\sqrt{3}\,cm$; $a_b=\frac{AB\sqrt{3}}{6}\Rightarrow AB=24cm$. ***b)*** $V=576\sqrt{3}\,cm^3$

27. ***a)*** $DB^2=D'B^2-D'D^2\Rightarrow DB=12\sqrt{2}\Rightarrow AB=12cm$. $V=A_b\cdot h=144\cdot 9=1296cm^3$.

b) $OD'=\sqrt{D'D^2+DB^2}=13\sqrt{17}$ cm, $A_{\Delta ACD'}=\frac{AC\cdot OD'}{2}=\frac{12\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{17}}{2}=18\sqrt{34}\,cm^2$.

28. ***a)*** $MQ=MN=NP=PQ\Rightarrow MNPQ$ = romb. Avem $\Delta MBN\equiv\Delta NCP\Rightarrow m(\sphericalangle NMB)=m(\sphericalangle PNC)$ şi $m(\sphericalangle NMB)+m(\sphericalangle MNB)=90^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle MNB)+m(\sphericalangle PNC)=90^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle PNM)=90^\circ$ şi, cum $MNPQ$ este romb, rezultă că $MNPQ$ este pătrat. ***b)*** $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=16cm^3$. **29.** ***a)*** În triunghiul $A'AM$ avem $l^2+\frac{l^2}{4}=20\Rightarrow l^2=16\Rightarrow l=4cm$; $A_t=6\cdot l^2=96cm^2$. ***b)*** $A_{A'MD}=4\sqrt{6}\,cm^2$. Avem $9=\sqrt{81}<\sqrt{96}<\sqrt{100}=10$. **30.** ***a)*** $OM=\frac{l\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$; $VM=\frac{l\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\Rightarrow VO=2\sqrt{6}$ cm; $V=18\sqrt{2}\,cm^3$. ***b)*** Avem $AM=3$, $AN=3\sqrt{3}$, $MC=3\sqrt{3}$, $NC=3\Rightarrow MN=3\sqrt{2}$. Rezultă $AN^2=AM^2+MN^2$, deci triunghiul AMN este dreptunghic, iar $A_{\Delta AMN}=\frac{AM\cdot AN}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$.

31. ***a)*** Din triunghiul dreptunghic ASM obţinem $\frac{3l^2}{4}=144-\frac{l^2}{4}\Rightarrow l^2=144\Rightarrow l=12cm$. Atunci $SO^2=SA^2-AO^2\Rightarrow SO=2\sqrt{6}$ cm. Obţinem $V=72\sqrt{2}\,cm^3$. ***b)*** Punctele P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[AO]$ şi $[BO]$. Aşadar $[PQ]$ este linie mijlocie în triunghiul AOB, deci $PQ=6$ cm. Înălţimea corespunzătoare laturii $[PQ]$ este egală cu $5\sqrt{3}$ cm, iar aria triunghiului CPQ este egală cu $15\sqrt{3}$ cm. **32.** ***a)*** $MD=MB=\frac{l\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm. Dacă $MP\perp BD, P\in(BD)$, atunci conform teoremei lui Pitagora in triunghiul MPB obţinem $MP=2\sqrt{2}$ cm. ***b)*** $V=\frac{l^3\sqrt{2}}{12}=\frac{16\sqrt{2}}{3}cm^3$. **33.** ***a)*** $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=288\ cm^3$. ***b)*** $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul SPC, deci $MO\parallel SC\Rightarrow MO\parallel(SEC)$.

Scanned with OKEN Scanner

34. ***a)*** $A_l = 12 \cdot h = 72 \Rightarrow h = 6\text{cm}$. ***b)*** $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6}{3} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **35.** ***a)*** $AD \perp (DCC'D')$ şi $D'C \subset (DCC') \Rightarrow D'C \perp AD$. ***b)*** $DB = 5\sqrt{2} \Rightarrow D'B = 10\sqrt{2} \Rightarrow$ conform teoremei lui Pitagora: $DD' = 5\sqrt{6}$ cm. Aria laterală a prismei este egală cu $100\sqrt{6}$ cm^2. **36.** ***a)*** $\frac{72 \cdot h}{3} = 144\sqrt{3} \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$. Din AC=12 cm şi teorema lui Pitagora în triunghiul VOA, obţinem VA=VC=AC=12 cm. ($AC \cap BD = \{O\}$). ***b)*** Apotema piramidei este egală cu $3\sqrt{14}$ cm. $A_l = 72\sqrt{7}$ cm^2. **37.** ***a)*** Apotema piramidei este egală cu 10 cm. $A_l = 240\,\text{cm}^2$. ***b)*** $A_{DMN} = A_{ABCD} - A_{ADN} - A_{DCM} - A_{BMN} = 63\,\text{cm}^2$. **38.** ***a)*** $A_t = (L + l + h)^2 - (L^2 + l^2 + h^2) = 144\,\text{cm}^2$. ***b)*** $P = 2(4\sqrt{2} + 7)\text{cm}$. **39.** ***a)*** $A_t = 6 \cdot l^2 = 96\,\text{cm}^2$. ***b)*** $AN = \sqrt{17}$ cm, $AM = 5$cm, $MN = 6\text{cm} \Rightarrow P_{AMN} = 11 + \sqrt{17}$ cm. **40.** ***a)*** Din proprietatea unghiului de 30° aplicată în triunghiul $A'BC$ obţinem $A'C$=12 cm. Cu teorema lui Pitagora triunghiul $AA'C$ obţinem AA'= 6 cm. ***b)*** $A_t = 36 + 108\sqrt{2}\,\text{cm}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3. Variante de subiecte

Tema 3.1 **Subiecte date la Evaluarea Naţională în anii 2010 – 2012**

Testul 1 Evaluarea Naţională, 27 iunie 2012

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	15	5p
2.	15	5p
3.	$(-\infty, 2]$	5p
4.	16	5p
5.	150	5p
6.	12	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$b=\sqrt{5}+1$	2p
	$\sqrt{ab}=2$	3p
3.	Notând cu x numărul fetelor din clasă, rezultă că numărul băieţilor este egal cu $26-x$	1p
	$x-2=2\cdot(26-x-3)$	2p
	Finalizare: $x=16$	2p
4.*a)*	Reprezentarea unui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparţine graficului funcţiei f	2p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
b)	$A(a,-a)\in G_f \Rightarrow f(a)=-a$	2p
	$-2a+3=-a \Rightarrow a=3$	3p
5.	$1+\dfrac{2-x}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}$	2p
	$\dfrac{x-1}{(2x+1)^2-(x+2)^2}=\dfrac{1}{3(x+1)}$	2p
	$E(x)=9$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$A_{\text{laterală}}=P_{\text{bazei}}\cdot h$	2p
	$A_{\text{laterală}}=1600\,\text{cm}^2$	3p
b)	Notând cu $h_{apă}$ înălţimea la care se ridică apa în vază, avem $V_{apă}=A_{\text{bazei}}\cdot h_{apă}$	1p
	$A_{\text{bazei}}=100\ \text{cm}^2$	2p
	$V_{apă}=3000\ \text{cm}^3 \Rightarrow h_{apă}=30\ \text{cm}$	2p

Scanned with OKEN Scanner

c)	$V_{cub}=64\ cm^3$	2p
	Volumul celor 4 cuburi este egal cu $256\ cm^3$	1p
	Nivelul apei a crescut cu 2,56 cm	2p
2.a)	$DB=\sqrt{AD^2+AB^2}$	2p
	$DB=35$ cm	3p
b)	Distanța de la E la AB este egală cu 21 cm	2p
	Aria cerută este egală cu $294\ cm^2$	3p
c)	Notând cu P proiecția punctului A pe dreapta EB, obținem $AP=\frac{84\sqrt{13}}{13}$ cm	2p
	$\sin(\sphericalangle AEB)=\frac{12}{13}$	3p

Testul 2 Evaluarea Națională 27 iunie 2012, subiect de rezervă

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	10	5p
2.	12	5p
3.	5	5p
4.	8	5p
5.	30	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează cubul	4p
	Notează cubul	1p
2.	$\left\|\sqrt{5}-3\right\|=3-\sqrt{5}$	2p
	$\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$	2p
	$a=6\in\mathbb{Z}$	1p
3.	Se notează cu n numărul de păsări. Cum $3\mid n, 4\mid n$ și c.m.m.d.c. $(3,4)=1$, obținem $12\mid n$	2p
	$70<n<80\Rightarrow n=72$	1p
	$72-\frac{1}{3}\cdot 72-\frac{1}{4}\cdot 72=30$. Sunt 30 de găște	2p
4.a)	Reprezentarea unui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	$A(m,-7)\in G_f\Rightarrow f(m)=-7$	3p
	$-2m+1=-7\Rightarrow m=4$	2p
5.	$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8x$	2p
	$(x-1)^2-(x+1)^2=-4x$	2p
	Finalizare	1p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.*a)*	$V = L \cdot l \cdot h \Rightarrow V = 300 \text{ cm}^3$	3p
	$V = 0{,}3$ litri	2p
b)	$A_{\text{totală paralelipiped}} = 2L \cdot l + 2L \cdot h + 2l \cdot h = 280 \text{ cm}^2$	2p
	$\frac{10}{100} \cdot 280 = 28 \text{ cm}^2$	2p
	$A_{\text{material}} = 280 + 28 = 308 \text{ cm}^2$	1p
c)	Triunghiul MAS este dreptunghic	2p
	$MS = 12{,}5$ cm	2p
	Finalizare	1p
2.*a)*	Lungimea unui semicerc este egală cu $\pi R = \pi$ m	2p
	Lungimea benzii protectoare este egală cu $(8 + 2\pi)$ m	3p
b)	$A_{ABCD} = 8 \text{ m}^2$	2p
	Aria celor două semicercuri este egală cu $\pi \text{ m}^2$	2p
	Aria suprafeței mesei este $(8 + \pi) \text{ m}^2$	1p
c)	Lungimea traseului parcurs de furnică este $L_f = 2\left(1 + \sqrt{5}\right)$ m	2p
	Lungimea traseului parcurs de buburuză este $L_b = (4 + \pi)$ m	1p
	$2\sqrt{5} = \sqrt{20} < 5 < 2 + 3{,}14 < 2 + \pi$, de unde concluzia	2p

Testul 3 Evaluarea Națională 6 iunie 2012, sesiunea specială

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	14	5p
2.	20	5p
3.	48	5p
4.	20	5p
5.	90	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	1p
	$\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$	1p
	$a = 4 \in \mathbb{Z}$	3p
3.	Se notează cu x prețul unei cărți $\Rightarrow 10 - x$ este prețul unui pix, iar $x - 5$ este prețul unui caiet	2p
	$2x - 5 = 9$	2p
	Prețul unei cărți este de 7 lei	1p
4.	Reprezentarea unui punct care aparține graficului funcției f	2p
a)	Reprezentarea altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p

Scanned with OKEN Scanner

b)	$A \in G_f \Rightarrow f(p) = p+4$	2p
	$6-3p = p+4 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$	3p
5.	$2 - \frac{8}{x+2} = \frac{2(x-2)}{x+2}$	2p
	$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$	2p
	$E(x) = 2$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$AD = 5$ m	2p
	$DM = 13$ m	3p
b)	Feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale	2p
	$A_{\text{laterală piramidă}} = 25\sqrt{3}$ m^2	3p
c)	O centrul pătratului $MNPQ \Rightarrow SO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ m	2p
	Înălţimea turnului este egală cu $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+12\right)$ m	1p
	$\frac{5\sqrt{2}}{2}+12 = \frac{\sqrt{50}}{2}+12 < \frac{\sqrt{64}}{2}+12 = 16$	2p
2.a)	$A = L \cdot l = 216$ dm^2	3p
	$A = 2{,}16$ m^2	2p
b)	$AP = BP = 6\sqrt{10}$ dm	3p
	$P_{APB} = 12+12\sqrt{10}$ dm	2p
c)	$\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle DCN$ şi $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle DNC \Rightarrow \Delta BNM$ şi ΔCND sunt asemenea	1p
	$\frac{MB}{DC} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{1}{2}$	1p
	$BN + NC = BC = 18$ dm $\Rightarrow BN = 6$ dm şi $NC = 12$ dm	1p
	ΔBNM şi ΔCND sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow m(\sphericalangle MNB) = m(\sphericalangle DNC) = 45°$	1p
	$m(\sphericalangle MND) = 90° \Rightarrow MN \perp ND$	1p

Testul 4 Evaluarea Naţională 2012, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	8	5p
2.	10	5p
3.	20	5p
4.	80	5p
5.	10	5p
6.	20	5p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează prisma	4p
	Notează prisma	1p
2.	$5a-11b+21c=2a+b-3c+3(a-4b+8c)$	3p
	Finalizare $5a-11b+21c=90$	2p
3.	Se notează cu x numărul de pagini citite în prima zi; $x+(x+3)+(x+6)+(x+9)+(x+12)=230$	2p
	$x=40\Rightarrow$ numărul de pagini citite, pe zile, este: 40, 43, 46, 49, 52.	2p
	În a doua zi persoana a citit 43 de pagini, iar 43 este un număr prim	1p
4.a)	Reprezentarea corectă a unui punct de pe graficul funcției f	2p
	Reprezentarea altui punct care aparține graficului funcției f	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	$G_f\cap Oy=\{A(0,-3)\}$	1p
	$G_g\cap Oy=\{B(0,5)\}$	1p
	$G_f\cap G_g=\{E(2,-1)\}$	1p
	$AB=3+5=8$	1p
	$A_{\Delta AEB}=8$	1p
5.	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$	2p
	$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$	2p
	$x^2+\frac{1}{x^2}=7$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	Notăm piramida $VABC$ și cu O centrul bazei $ABC\Rightarrow OA=\sqrt{3}$ cm	2p
	Finalizare: $VO=1$ cm	3p
b)	$A_b=\frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm^2	3p
	Finalizare: $V=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm^3	2p
c)	Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$, atunci $VM=\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm	1p
	$A_{lat}=\frac{9}{4}\sqrt{7}$ cm^2	1p
	$A_t=\frac{9\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{4}$cm^2	1p
	$\sqrt{3}+\sqrt{7}>4,3$	1p
	Aria suprafeței minime este mai mare decât 960 cm^2	1p
2.a)	Perimetrul grădinii este de $2\cdot(100+60)=320$ m	2p
	Lungimea gardului este $320-4\cdot4=304$ m	3p
b)	Se formează patru parcele dreptunghiulare, fiecare parcelă având lungimea de	2p

Scanned with OKEN Scanner

	$(100-4):2=48$ m și lățimea de $(60-4):2=28$ m	
	Aria unei parcele este de $48\cdot 28=1344$ m^2	1p
	Aria grădinii este de $100\cdot 60=6000$ m^2	1p
	Aria aleilor este egală cu $6000-4\cdot 1344=624$ m^2	1p
c)	Raza maximă a cercului $=14$ m	2p
	Finalizare: $A_c=196\pi$ m^2	3p

Testul 5 Evaluarea Națională 22 iunie 2011

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	10	5p
2.	$\frac{3}{10}$	5p
3.	10	5p
4.	6	5p
5.	45	5p
6.	45	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$(a-1)(b+1)=6\Rightarrow b+1\in D_6$	2p
	Cum $a,b\in\mathbb{N}\Rightarrow (a,b)\in\{(2,5);(3,2);(4,1);(7,0)\}$	3p
3.	Se notează cu x prețul inițial al televizorului; prețul după scumpire este $x+10\%x=\frac{11}{10}x$	1p
	Prețul după ieftinire este $\frac{11}{10}x-10\%\left(\frac{11}{10}x\right)=\frac{99}{100}x$	2p
	$\frac{99}{100}x=1980$	1p
	$x=2000$ lei	1p
4a)	Reprezentarea corectă a unui punct care aparține graficului funcției	2p
	Reprezentarea corectă a altui punct care aparține graficului funcției	2p
	Trasarea graficului funcției	1p
b)	Fie punctul $M(a,a)$. Avem $f(a)=a$ și $f(a)=-a+2$	3p
	Finalizare: ambele coordonate sunt egale cu 1	2p
5.	$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-\sqrt{6}\right)=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$	2p
	$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}$	2p
	$a=3\in\mathbb{N}$	1p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AC^2 = 1800$	2p
	$CC' = AC = 30\sqrt{2}$ cm	3p
b)	$\sphericalangle(AP,(ABC)) \equiv \sphericalangle PAC$	2p
	$\Delta ACC'$ este dreptunghic isoscel	1p
	$m(\sphericalangle AP,(ABC)) = 45^\circ$	2p
c)	Fie $PT \perp (ABC)$ şi cum A, C', P sunt puncte coliniare rezultă că $T \in AC$	1p
	În ΔAPT, $\sin 45^\circ = \frac{PT}{AP}$	2p
	$PT = 45\sqrt{2}$ cm	2p
2.a)	$OM = 8$, unde O este mijlocul diametrului $[AB]$	1p
	$MD = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}$ m	3p
	Distanţa parcursă de albină este de $\left(8 + 8\sqrt{10}\right)$ m	1p
b)	Sunt 2 cercuri, fiecare cu raza $r = 8$ m	2p
	Aria suprafeţei plantate cu flori este egală cu $\mathcal{A} = 2\pi r^2 = 128\pi$ m^2	3p
c)	Aria dreptunghiului este egală cu 512 m^2	2p
	Aria porţiunii haşurate este egală cu $128 \cdot (4 - \pi)$ m^2	1p
	$\pi > 3{,}14 \Rightarrow 4 - \pi < 0{,}86 \Rightarrow 128(4 - \pi) < 111$ m^2	2p

Testul 6 Evaluarea Naţională 8 iunie 2011, sesiunea specială

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Inversul numărului $\frac{5}{3}$ este egal cu..... $\frac{3}{5}$	5p
2.	Media aritmetică a numerelor 8 şi 12 este egală cu..... 10	5p
3.	Scrisă sub formă de interval, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2x - 4 \geq 0$ este egală cu..... $[2, +\infty)$	5p
4.	Un pătrat cu perimetrul de 16 cm are latura de... 4 ..... cm	5p
5.	În Figura 1 este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$ în care $AB = 5$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu... 30 ..... cm	5p

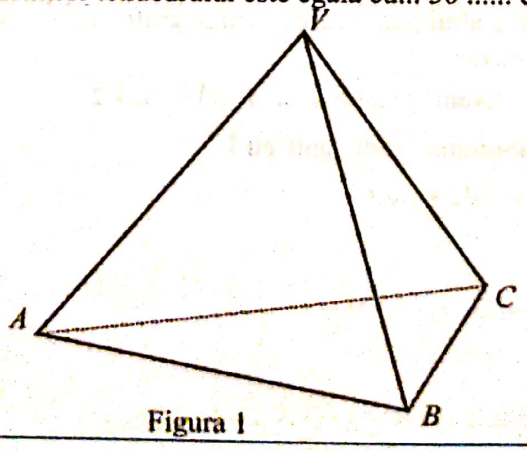
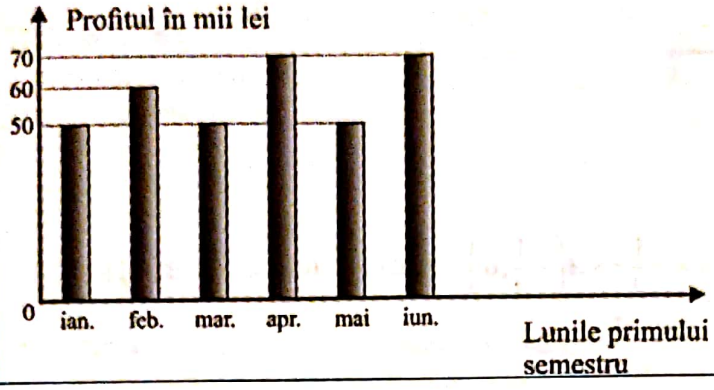
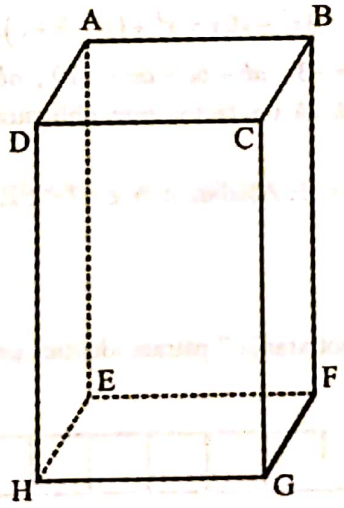


Figura 1

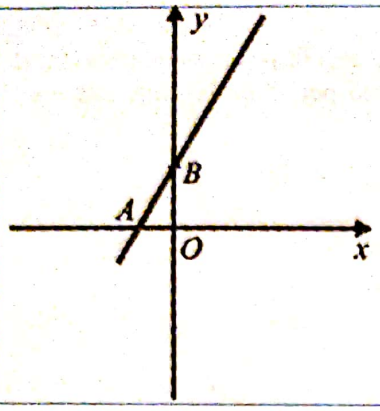
Scanned with OKEN Scanner

6.	În graficul de mai jos sunt reprezentate profiturile lunare ale unei firme în primul semestru al anului 2011. Profitul total realizat de firmă în această perioadă de timp este egal cu... 350 ..... mii lei.  	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.  	**4p**
2.	Enumerați elementele mulțimii $A=\left\{x/x\in\mathbb{Z}-\{-1\},\frac{3x+2}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ $\frac{3x+2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{-1}{x+1}=3+\frac{-1}{x+1}$, deci $x+1\in D_{-1}=\{1,-1\}$ $x+1=1\Rightarrow x=0$ și $x+1=-1\Rightarrow x=-2$. Așadar, $A=\{0,-2\}$	**2p**
3.	Se consideră două numere reale pozitive distincte. Suma lor se înmulțește cu diferența lor. Produsul astfel obținut este un număr pozitiv cu 4 mai mic decât pătratul numărului mai mare. Determinați cel mai mic dintre cele două numere. Fie x, y numerele, $x>y$. Avem $(x+y)\cdot(x-y)=x^2-4$, de unde se obține $x^2-y^2=x^2-4$, deci $y=2$.	**1p**

Scanned with OKEN Scanner

4.a)		2p
b)	$f(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $f(0)=2\cdot 0+1=1\Rightarrow B(0,1)$ $A_{AOB}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}=\frac{1}{4}$	3p
5.	Dați un exemplu de 3 numere întregi a, b, c astfel încât să aibă loc egalitatea $x^3-3x^2-10x-(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)$ pentru orice număr real x. Egalitatea se poate scrie $x^3-3x^2-10x=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$, de unde se obține $a+b+c=-3$, $ab+bc+ac=-10$, $abc=0$. Din ultima egalitate rezultă că un factor este obligatoriu 0. Fie $c=0$, de unde $a+b=-3$, $ab=-10$. De aici se obține $a=-5$, $b=2$. Așadar, $a, b, c\in\{-5, 2, 0\}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	*a)* Singurul mod în care se pot aranja 7 pătrate identice pentru a forma un dreptunghi este acesta: Așadar, podeaua are dimensiunile 4 dm și 28 dm, aria fiind $4\cdot 28=112$ dm².	2p
b)	Înălțimea camerei este $4\cdot 5=20$ dm. Aria laterală este $2\cdot 4\cdot 20+2\cdot 28\cdot 20=1280$ dm².	2p
c)	Volumul este $V=4\cdot 28\cdot 20=2240$ dm² = 2240 litri.	1p
2.a)	$4+4+8+2\pi R=16+4\pi$ cm	1p
b)	Un dreptunghi (semidiscurile se compensează reciproc); aria este $4\cdot 8=32$ cm².	2p
c)	Pătratul are aria 256 cm²; poate fi acoperit complet cu 8 piese (se poate desena o astfel de acoperire)	2p

Testul 7 Evaluarea Națională 2011, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	13	5p
2.	10	5p

Scanned with OKEN Scanner

3.	40	5p
4.	54	5p
5.	45	5p
6.	31	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$-4 \le 3x-2 \le 4$	2p
	$-\frac{2}{3} \le x \le 2$	1p
	$A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$	2p
3.	Se notează cu x numărul necunoscut; $2x - 0,(3) = \frac{6x-1}{3}$	1p
	$1,4(6) = \frac{22}{15}$	1p
	$0,(45) = \frac{5}{11}$	1p
	$\frac{6x-1}{3} \cdot \frac{15}{22} = \frac{5}{11}$	1p
	$x = \frac{1}{2}$	1p
4.a)	Alegerea corectă a două puncte care aparţin graficului	4p
	Trasarea graficului funcţiei	1p
b)	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1$	2p
	$f(m) = -2m+5$	1p
	$-2m+5 = -1$	1p
	$m = 3$	1p
5.	$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3$	1p
	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1$	1p
	$\left(1-\sqrt{5}\right) \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) = -4$	1p
	$a = 1 \in \mathbb{Z}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Lungimea muchiei cubului este egală cu 10 dm	2p
	$V_{cub} = V_{apă} = 1000$ dm^3	2p
	$V_{apă} = 1000$ litri	1p
b)	$P_b = 66$ dm	2p
	Aria laterală $A_l = P_b \cdot h = 660$ dm^2	3p
c)	Notăm cu h înălţimea cerută şi astfel volumul apei este $V_{apă} = 25 \cdot 8 \cdot h = 1000$ dm^3	3p

Scanned with OKEN Scanner

	$h=5$ dm	2p
2.a)	Raza rondului este $r=3$ m	2p
	Aria rondului este egală cu $\pi r^2=9\pi$ m^2	3p
b)	Aria dreptunghiului este egală cu 54 m^2	2p
	Aria porțiunii haşurate este egală cu $(54-9\pi)$ m^2	1p
	Justificarea faptului că $54-9\pi<9\pi$	2p
c)	Cea mai mare distanță dintre două puncte ale dreptunghiului este lungimea diagonalei $[AC]$	2p
	Folosind teorema lui Pitagora se obține $AC=\sqrt{117}$ m	2p
	Finalizare: $\sqrt{117}<\sqrt{121}=11$	1p

Testul 8 Evaluarea Națională, 12 mai 2010

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	4	5p
2.	5	5p
3.	3	5p
4.	$4\sqrt{3}$	5p
5.	60	5p
6.	2	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$\begin{cases}9l+7m=76\\l+m=10\end{cases}$	2p
	$9(10-m)+7m=76$	1p
	$m=7$	2p
3.a)	$\frac{1}{4}=0,25=25\%$	2p
	$25<30<40$	2p
	Persoana cheltuieşte cel mai puțin în a treia zi	1p
b)	Persoana cheltuieşte 95% din S, deci îi rămân 5% din S	2p
	5% din $S=100$	1p
	$s=2000$ lei	2p
4.	$f(0)=1\Rightarrow A(0,1)$	2p
	$f(1)=0\Rightarrow B(1,0)$	2p
	Trasarea graficului funcției (dreapta AB)	1p
5.	$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=7+2\sqrt{10}$	2p
	$p=7+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-2-\sqrt{10}+10$	2p
	$p=15\in\mathbb{N}$	1p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$	2p
	$AC' = 13$ m	3p
b)	Aria laterală $= P_b \cdot h$	2p
	$P_b = 32$ m	2p
	Aria laterală $= 96$ m^2	1p
c)	96000 litri $= 96000$ dm^3 $= 96$m^3	1p
	$48 \cdot h_{apă} = 96$	2p
	$h_{apă} = 2$ m	2p
2.a)	Raza cercului $= 15$ m	1p
	Lungimea celor două semicercuri este egală cu lungimea unui cerc. Lungimea cercului $= 2\pi R$	2p
	Lungimea gardului $= (30\pi + 80)$ m	2p
b)	Aria dreptunghiului $= 1200$ m^2	1p
	Aria celor două semicercuri $= 225\pi$ m^2	1p
	Aria patinoarului $= (1200 + 225\pi)$ m^2	1p
	$1200 + 225\pi < 1200 + 225 \cdot 3{,}15 < 2000$	2p
c)	Triunghiul ABC este isoscel	1p
	$\sin(\measuredangle ABC) = \sin(\measuredangle ABO) = \frac{AO}{AB}$, unde O este mijlocul laturii $[BC]$	1p
	$AO = 15$ m	1p
	Din teorema lui Pitagora rezultă $AB = 25$ m	1p
	$\sin(\measuredangle ABC) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$	1p

Testul 9 Evaluarea Națională 2010, sesiunea specială

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	208	5p
2.	$\frac{3}{2}$	5p
3.	$[0,3]$	5p
4.	10	5p
5.	36	5p
6.	35	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$m_a = \frac{a+b}{2}$	1p
	Suma numerelor este 35	2p

Scanned with OKEN Scanner

	Celălalt număr este $35-7=28$	2p
3.a)	Notăm cu x prețul înainte de reduceri. $90\%\cdot 90\%x=81$	3p
	Rezolvarea ecuației: $x=100$ lei	2p
b)	$p\%$ din $100=81$ lei	1p
	$p=81$	2p
	Deci prețul după cele două reduceri s-a micșorat cu 19%	2p
4.	$f(2)=a$	1p
	$f(2)=6-2a$	2p
	$6-2a=a\Rightarrow a=2$	2p
5.	$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$	2p
	$x^2-10x+25=(x-5)^2$	2p
	$\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25}=\frac{x+3}{x-5}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. AM este distanța de la punctul A la planul (BCE)	2p
	$AM=\sqrt{3}$ m	3p
b)	$A_b=\sqrt{3}$ m^2	2p
	$V_{prismă}=3\sqrt{3}$ m^3 (1p pentru formulă)	3p
c)	Aria totală a cortului $=18+2\sqrt{3}$ m^2	3p
	$18+2\sqrt{3}=18+\sqrt{12}<18+\sqrt{16}=22$, deci sunt suficienți 22 m^2 de pânză	2p
2.a)	1 ha $=10000$ m^2	2p
	8 ha $=80000$ m^2	3p
b)	ΔABP isoscel	1p
	$A_{ABP}=\frac{AB^2}{2}$	1p
	$A_{ABCD}=AB\cdot BC$	1p
	$\frac{A_{ABP}}{A_{ABCD}}=\frac{1}{4}$	1p
	Finalizare	1p
c)	$2AB^2=80000$	1p
	$AB=200$ m	1p
	Din teorema lui Pitagora rezultă $BP=200\sqrt{2}$ m	2p
	$BP\simeq 283$ m	1p

Testul 10 Evaluarea Națională 2010, model subiect www.edu.ro

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	16	5p
2.	4	5p

Scanned with OKEN Scanner

3.	$\frac{11}{29}$	5p
4.	2	5p
5.	5	5p
6.	30	5p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează corect piramida $SABCD$	4p
	Notează corect	1p
2.	Numărul cărților de pe raftul al II-lea $= 24 \cdot 2 = 48$ cărți	3p
	În total sunt $48 + 24 = 72$ cărți	2p
3.a)	$55 : 4 = 13$ rest 3	2p
	$55 : 7 = 7$ rest 6	2p
	Deci pot fi 55 de bomboane	1p
b)	Fie x numărul minim de bomboane; $x = 4a + 3$ și $x = 7b + 6$	2p
	Justificarea faptului că $x = 27$	3p
4.	$f(0) = -5, -5 \neq 5$, deci $P(0,5) \notin G_f$	3p
	$f(5) = 0$, deci $P(5,0) \in G_f$	2p
5.	$(x+2)^3 - x - 2 = (x+2)\left[(x+2)^2 - 1\right] =$	2p
	$= (x+2)(x+2+1)(x+2+1) =$	2p
	$= (x+1)(x+2)(x+3)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$MB = 6 - x$	2p
	$A_{MBCG} = MB \cdot BC$	1p
	$A_{MBCG} = 5(6 - x)$	2p
b)	$DG = 4 + x$	2p
	$A_{AMGD} = \frac{(DG + AM) \cdot MG}{2}$	1p
	$A_{AMGD} = \frac{(4 + x + x) \cdot 5}{2} = 5 \cdot (x + 2)$	2p
c)	$5(6 - x) = 5(x + 2)$	2p
	Finalizare: $x = 2$	3p
d)	$A_{AMGD} = 5 \cdot 4 = 20$ m^2	1p
	20 m$^2 > 10$ m^2, deci se acordă reducere; pentru 1 m^2 de gresie va plăti $80 - 80 \cdot 5\% = 76$ lei	2p
	Toată gresia costă $76 \cdot 21 = 1596$ lei	2p
2.a)	$A_{ABCD} = 36$ dm^2	1p
	Calculul apotemei piramidei: $SM = 3\sqrt{10}$ dm, unde M este mijlocul unei muchii a bazei	2p
	$A_{laterală} = 36\sqrt{10}$ dm^2	1p

Scanned with OKEN Scanner

	$A_{totală} = 36\left(\sqrt{10}+1\right)$ dm^2	1p
b)	$OT = SO - ST = 6$ dm	1p
	$V_{TABCD} = 72$ dm^3 (Dacă elevul nu calculează volumul, dar scrie corect formula lui, se acordă **1p**)	2p
	Finalizare: $72 > 70$, deci în bazin pot intra 70 de litri de apă	2p

Scanned with OKEN Scanner

M. PERIANU • C. STĂNICĂ • I. BALICA • C.

Tema 3.2 **Variante de subiecte propuse spre rezolvare**

Testul 1

I. 1. 108; **2.** 10; **3.** 12; **4.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; **5.** $36\sqrt{3}$; **6.** 24.

II. 2. $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$; **3.** ***a)*** 12 persoane; ***b)*** 440 lei; **4.** ***a)*** $m=1$; **5.** $a=-1\in\mathbb{Z}$.

III. 1. ***a)*** $V=4500$ m^3; ***b)*** 3000000 l apă; ***c)*** 37 h şi 30 minute; **2.** ***a)*** $L_{gard}=8\pi+120$ m;
$3{,}14<\pi<3{,}15 \Rightarrow 25{,}12<8\pi<25{,}2 \Rightarrow 145{,}12<8\pi+120<145{,}2<146$ m $\Rightarrow$
$L_{gard}<146$ m. ***b)*** $S=1100\pi+4000\Rightarrow\frac{S-4000}{11\pi}=100=10^2$ - pătrat perfect; ***c)*** 224000 lei.

Testul 2

I. 1. 3; **2.** 60; **3.** $\frac{71}{30}$; **4.** 9; **5.** 3; **6.** 13.

II. 2. $x=2$; **3.** 12 km; **4.** ***b)*** 3; ***c)*** -1175.

III. 1. ***a)*** $4x+4$ m; ***b)*** 104 m; ***c)*** 480 m^2; **2.** ***a)*** 6 dm^3; ***b)*** 750 bomboane; ***c)*** 10 cutii mari.

Testul 3

I. 1. 9; **2.** $x\in\{0;2;4;6;8\}$; **3.** 3; **4.** 100; **5.** 48; **6.** 25.

II. 2. 56711,25 lei; **3.** $x=3$, $y=-\frac{1}{2}$; **4.** b) $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot f(1)\cdot f(-3)}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 6}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{N}$;

c) $a\in\{-2;-1\}$.

III. 1. ***a)*** $R=20$ m $\Rightarrow l=40$ m $\Rightarrow A=2000$ m^2; ***b)*** $S=400\cdot(5+\pi)\Rightarrow\frac{S}{5+\pi}=400=20^2$ - pătrat perfect; **2.** ***a)*** 2400 l; ***b)*** 1120 dm^2; ***c)*** $h=0{,}6$ m.

Testul 4

I. 1. 8; **2.** $\frac{4}{3}$; **3.** 180; **4.** 8; **5.** 30; **6.** 10.

II. 2. 80 cărţi; **3.** $x\in[2;+\infty)$; **4.** ***b)*** $\frac{1}{4}$; **5.** $a=7\in\mathbb{N}$.

III. 1. ***a)*** $A_l=36$ m^2 $\Rightarrow$ sunt necesare 9 cutii; ***b)*** 243 lei; ***c)*** $V=40$ m^3 = 40000 litri, $40000:250=160$ zile; **2.** ***a)*** 400 m^2; ***b)*** 850 m^2; ***c)*** $400\cdot 25=10000$ fire, $10000\cdot 1{,}5$ lei = 15000 lei.

Testul 5

I. 1. 11; **2.** $2\cdot 3^3$; **3.** 0; **4.** 6; **5.** $2\sqrt{3}$; **6.** 350.

Scanned with OKEN Scanner

II. 1. *a)* 100; *b)* 140; **3.** $(x-5)^3-x+5=(x-5)^3-(x-5)=(x-5)\left[(x-5)^2-1^2\right]$; **4.** *a)* $f(x)=x+4$; *b)* $m=2$; **5.** $a=1\in\mathbb{N}$.

III. 1. *a)* $A_{OCD}=100$ m^2; $100:2=50$ şezlonguri; *b)* $\pi r=5\pi\Rightarrow r=5$ m $\Rightarrow$ $A_{\text{piscină}}=\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}=\frac{100\pi}{2}+\frac{25\pi}{2}=\frac{125\pi}{2}$ m^2; *c)* se închiriază 40 şezlonguri $\Rightarrow$ se încasează $40\cdot 20=800$ lei; 2) a) $V=4$ m$^3=4000$ litri $\Rightarrow$ este nevoie de 400 găleţi; *b)* 100 minute; *c)* 0,8 m.

Testul 6

I. 1. 9; **2.** b; **3.** 1; **4.** 7; **5.** $24\sqrt{2}$; **6.** 300.

II. 2. 60 km; 20 km; 16 km; 24 km; **3.** 1215 lei; **4.** *b)* $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; **5.** $a=4\in\mathbb{N}$.

III. 1. *a)* $\sqrt{281}$ m; *b)* 248 m^2; *c)* 2 m; **2.** *a)* 15 m; *b)* $20\cdot(15-x)$ m^2; 2,5 m; *c)* $A_{MBCN}=250$ m$^2=2{,}5$ dam$^2=2{,}5$ ari $\Rightarrow$ se recoltează 75 kg sfeclă.

Testul 7

I. 1. 987; **2.** 3; **3.** $x=-11$; **4.** 100; **5.** 30; **6.** 1 ianuarie.

II. 2. 500 borcane; **3.** *a)* 50 lei; *b)* 45 lei şi 11 lei; 4) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; 5) 15.

III. 1. *a)* $19{,}56-2x$; *b)* 0,9 m; *c)* 4 litri vopsea; **2.** *a)* 448 cm^3; *b)* $32\sqrt{13}$ cm^2; *c)* 6 lei.

Testul 8

I. 1. 1; **2.** $x\in[2;+\infty)$; **3.** $\frac{2}{5}$; **4.** 8; **5.** $10\sqrt{2}$; **6.** 6,73.

II. 2. $a=6$; $b=9$; $c=12$; **3.** *a)* 24; *b)* 28; **4.** *a)* $m=2$; *b)* $x=1$; **5.** $3+3^2+3^3=39\vdots 13$..

III. 1. *a)* 6 cm; *b)* $A_l=288$ cm^2; *c)* 9 cm; **2.** *a)* $\frac{r}{R}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\frac{4}{\pi}$; *c)* $9\cdot(4-\pi)$ cm^2.

Testul 9

I. 1. 99; **2.** $A=(-1;3]$; **3.** 45; **4.** –4,3; **5.** $5\sqrt{3}$; **6.** 109.

II. 2. 74; **3.** 13 copii; 63 banane; **4.** $A=2012^2$ – pătrat perfect; **5.** 49.

III. 1. *a)* 2,10 m; *b)* $30\cdot(30-\pi)$ cm^2; *c)* 30π; **2.** *a)* $2\sqrt{11}$ m; *b)* $16\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)$ m^2; *c)* $\frac{224}{3}$ m^3.

Testul 10

I. 1. 0; **2.** 1; **3.** -1; **4.** 18π cm; **5.** 216 cm^3; **6.** 2.

II. 2. *a)* 50 bani; *b)* 2 kg mere şi 4 kg piersici; **3.** *a)* 10 ani, 30 ani; *b)* peste 10 ani;

Scanned with OKEN Scanner

4. ***a)*** $f(x)=x-1$; ***5)*** $(x+5)^2+(2y-5)^2\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

III. 1. ***a)*** 120 cm; ***b)*** 5,7 cm; ***c)*** 58,02 lei.

Testul 11

I. 1. 36; **2.** 3; **3.** 18; **4.** 7; **5.** 54; **6.** 8.

II. 2. 200 pagini; **3.** 25; **4.** $\frac{2x+3}{x+1}$; **5.** ***a)*** -8; ***b)*** $A\left(\frac{4}{3};0\right)$; $B(0,-1)$.

III. 1. ***a)*** $3x$ dam^2; ***b)*** 6 dam; ***c)*** 4455 lei; **2.** ***a)*** 13500 cm^3; ***b)*** 13500 cm^3 = 13,5 dm^3 = 13,5 litri $\Rightarrow$ încap 10 litri de apă; ***c)*** $\sqrt{1125}$ cm.

Testul 12

I. 1. 0; **2.** $\frac{5}{3}$; **3.** 8; **4.** 30; **5.** $36\sqrt{3}$; **6.** 25.

II. 2. 3 ore; **3.** $2x=3+x\Rightarrow x=3$; 12 kg; **4.** ***a)*** $M\left(\frac{1}{3};1\right)$; ***b)*** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$;

5. $(x^2+5x)(x^2+5x+2)+1=[(x^2+5x)+1]^2$ pătrat perfect.

III. 1. ***a)*** 150 dale; ***b)*** 1,2 m; ***c)*** 1008 lei; **2.** ***a)*** 50 m^3; ***b)*** 5 cm; ***c)*** 0,5 m.

Testul 13

I. 1. 67; **2.** {-3, 4}; **3.** $\frac{23}{39}$; **4.** 10; **5.** $4\sqrt{2}$; **6.** 4.

II. 2. $225\cdot 3=675$ mere sunt în a doua ladă. $225+675=900$ mere sunt în total.

3. ***a)*** $123:4=30$ rest 3; $123:5=24$ rest 3; $123:6=20$ rest 3. Rezultă că pot fi 123 de militari în subunitate. ***b)*** Aflăm cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 5 şi 6 şi îl adunăm cu 3. Obţinem: $60+3=63$. Aşadar, numărul minim de militari este 63. **4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

Se rezolvă sistemul: $\begin{cases}f(-1)=0\\f(1)=4\end{cases}$, adică $\begin{cases}-a+b=0\\a+b=4\end{cases}$ de unde se obţine $a=b=2$.

5. $\frac{2x+6}{x^2+4x+3}=\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)}=\frac{2}{x+1}$

III. 1. ***a)*** Fie $CH\perp AB$, $H\in AB$. Rezultă că $HB=\frac{AB-CD}{2}=2$ dam. Cum triunghiul CHB este dreptunghic în H, rezultă că $CH=4$ dam. Aşadar, $A_{curte}=A_{trapez}=\frac{(AB+CD)CH}{2}=32$ dam^2.

b) $P_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=10+2\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}=16+4\sqrt{5}\cong 16+4\cdot 2{,}23=24{,}92$ *dam.* Aproximând prin adaos la un număr natural, obţinem 250 metri liniari de sârmă. ***c)*** $AF=AB-FH-HB$. Dar $EC=\frac{1}{3}CD=2\,dam=FH=HB$. De aici avem că $AF=6$ dam.

Scanned with OKEN Scanner

d) $\Delta EPC \sim FPA \Rightarrow \frac{EC}{AF}=\frac{EP}{PF}\Rightarrow \frac{EP}{FP}=\frac{2}{6}\Rightarrow \frac{EP}{EP+PF}=\frac{2}{8}$ de unde, cum $EF = 4$ rezultă că $EP = 1$ *dam*. Din $\frac{EP}{FP}=\frac{1}{3}$ rezultă că $PF = 3$ dam. Vom avea că: $A_{hasurata}=\frac{EC\cdot PE}{2}+\frac{PF\cdot AF}{2}=10$ dam^2.

2. *a)* $A_t=6(6+\sqrt{3})$ m^2. *b)* $V=18\ m^3=18000\ l$.

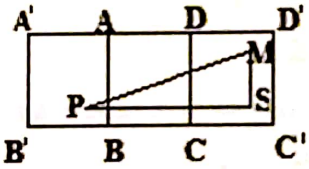
Testul 14

I. 1. 4; **2.** $a=3\sqrt{2}$; **3.** 6; **4.** 12; **5.** $9\sqrt{2}$ m; **6.** 4.

II. 2. Mai are de citi 30% din cele 240 de pagini, adică 72 de pagini. 164 + 240 = 404; 404 – 320 = 84 elevi cunosc ambele limbi; 164 – 84 = 80 de elevi cunosc doar limba franceză

4. Se rezolvă sistemul: $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(-2)=0 \end{cases}$, de unde se obţin $m = 0$ şi $n = 3$ $n = 3$.

III. 1. *a)* Cum perimetrul pătratului este egal cu $4l$, rezultă că $l = 64 : 4 = 16\ m$ Aşadar, $A_{parcela}=16^2=256\ m^2$. *b)* Numărul firelor este: $256 \cdot 16 = 4096$ *c)* $4096 \cdot 5 = 20480$ *kg* vinete s-au recoltat *d)* $20480 \cdot 1{,}5 = 30720$ lei a încasat **2.** *a)* Fie punctul R situat pe peretele $CDD'C'$ la distanţa de 1m faţă de muchiile CC' şi DC; Justificarea relaţiilor $DM \| RC'$ şi $PB' \| RC'$. Deci $PB' \| RC'$, de unde rezultă punctele P, B', M şi D coplanare; *b)* Pentru desfăşurarea cubului pe care se consideră punctul S ca în figura de mai jos. $PS = 8\text{m}, SM = 2\text{m}$. Drumul cel mai scurt este PM, iar $PM = 2\sqrt{17}\text{m}$.



c) Fie $MT \perp CC', T \in (CC'), TU \perp BB', U \in (BB')$ $BB' \perp (MUT) \Rightarrow BB' \perp MU$, $d(M, BB') = MU$. Cum unghiul MTU este drept, $MT = 3\text{m}, TU = 4\text{m} \Rightarrow MU = 5\text{m}$.

Testul 15

I. 1. $6\sqrt{5}$; **2.** $[3,+\infty)$; **3.** $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; **4.** 10 cm; **5.** $9\sqrt{3}$ m; **6.** 6,56.

II. 2. Dacă pe primul raft sunt x cărţi, pe al doilea sunt $5x$ cărţi. Avem că $x + 5x = 120$. De aici se obţine că pe primul raft sunt 20 de cărţi, iar pe al doilea 100 de cărţi. **3.** *a)* 1 km = 1 000 000 mm. După prima operaţie rămâne $1000000 \cdot \frac{1}{2}$, după a doua rămâne $1000000 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$. După (n – 1) operaţii rămâne $1000000 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1000000}{n}$. După n operaţii luăm $\frac{1000000}{n(n+1)}<1$. Se obţine inecuaţia $n(n+1)>1000000$, de unde $n = 1000$. *b)* După n operaţii rămâne: $\frac{1000000}{n+1}<1\Rightarrow n>999999\Rightarrow n=1000000$ **4.** $f(x) = x$ de unde, înlocuind $f(x)$ cu $2x – 4$ obţinem $x = 4$ deci punctul A(4, 4).

III. 1. *a)* Notând cu x lăţimea terenului, avem că lungimea acestuia este de $3x$ şi, exprimând perimetrul se ajunge la ecuaţia $8x = 200$. De aici, $x = 25$, deci lăţimea este de 25 m şi lungimea de 75 m. *b)* $A_{teren} = L \cdot l = 1875\ m^2$ *c)* $P_{exterior\ al\ pistei} = 2 \cdot (75 + 5) + 2 \cdot (25 + 5) = 220\ m$.

Scanned with OKEN Scanner

2. b) $O \in [AM]$, AM = 3VO, deci AM = 15 cm,

$OM = \frac{1}{3} \cdot AM = 5cm; m\left[\angle((VBC),(ABC))\right] = m(\angle VMO) = 45^0.$;

c) $A_l = 75\sqrt{6}cm^2$; $A_t = 75\sqrt{6} + 75\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

Testul 16

I. 1. 20; **2.** 0,4; **3.** 16; **4.** 30; **5.** 0,2 m; **6.** 1.

II. 2. Se notează cu x numărul caietelor de matematică şi cu y numărul caietelor de dictando. Se formează sistemul: $\begin{cases} x+y=200 \\ 1,8x+1,2y=270 \end{cases}$ din care se obţine $x = 50$ şi $y = 150$.

3. a) $V_{cub\ mare} = 125 \cdot V_{cub\ mic} = 125 \cdot 1\ cm^3 = 125\ m^3$. Deci, $l^3 = 125$ de unde $l = 5\ cm$.

b) 27 de cuburi mici nu au nicio faţă vopsită, 54 au o singură faţă vopsită. **4.** $f(-2\sqrt{2}) = -5$

5. $E(x) = \left[(x+3)+(x-4)\right]^2 = (2x-1)^2$

III. 1. a) $A = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5\ m^2$ **b)** $A_{trapez} = \frac{(7+5) \cdot 5}{2} = 30\ m^2$ **c)** Aria sufrageriei este de $40\ m^2$.

Aşadar, Aria suprafeţei cu gresie neagră este de 40 – 30 – 5 = 5 m^2 **d)** 31 · 40 = 1240 lei.

2. b) $A_l = 54\sqrt{3}cm^2$; **c)** $\frac{3\sqrt{6}}{2}cm$.

Testul 17

I. 1. 0,535; **2.** $\frac{3}{4}$; **3.** 39; **4.** 15; **5.** 36π; **6.** $\frac{4}{11}$.

II. 2. Cu x ani în urmă mama avea $40 - x$ ani, iar fiica avea $16 - x$ ani.

$40 - x = 3(16 - x)$ de unde se obţine $x = 4$. Deci cu 4 ani în urmă mama era de 3 ori mai în vârstă decât fiica. **3. a)** 3 · 2,4 + 3 · 9 = 34,2 ; 100 – 34,2 = 65,8 lei primeşte rest.

b) Pentru ca preţul coletului să fie minim trebuie ca acesta să conţină 2 cărţi şi 8 caiete.

9 · 2 + 8 · 2,4 = 37,2 lei. **4.** $f(x) = g(x)$, adică $-3x+4 = \frac{x}{3}+1$ de unde $x = \frac{9}{10}$.

$g\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{13}{10}$ deci punctul de intersecţie al graficelor celor două funcţii este $J\left(\frac{9}{10}, \frac{13}{10}\right)$.

5. $F(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$.

III. 1. a) $A = 1600\ m^2, P = 160\ m$. **b)** $A_{sect.\ circ.} = \frac{\pi R^2 u^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 90^o}{360^o} = 400\pi \cong 1256m^2$

c) $A_{port.\ haşurată} = 1600 - 1256 = 344\ m^2$ **d)** 344 · 1,5 = 516 kg sămânţă sunt necesare

516 · 8 = 4128 lei s-au plătit pentru sămânţa de gazon **2. a)** $V_{cub\ îndepărtat} = 2^3 = 8\ \text{cm}^3$

b) $V_{corp\ obţinut} = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56\ cm^3$; $A_{crp\ obţinut} = 96\ cm^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 18

I. 1. 84; **2.** $\left\{-2, \sqrt{9}, \frac{6}{3}\right\}$; **3.** 3500 cm^3; **4.** $\frac{13}{2} = 6{,}5$; **5.** 288 cm^3; **6.** 7,2.

II. 2. $425 + 425 \cdot 2 = 1275$ elevi. **3.** *a)* $n - 2$ este c.m.m.m.c. al numerelor 45, 36, 54, adică $n - 2 = 540$, de unde $n = 542$. *b)* $n - 2$ este multiplu de 540, de unde $n \in \{1622, 2162\}$.

4. $f(1) = 2 \Rightarrow A(1, 2) G_f$ **5.** $(x+5)^3 - x - 5 = (x + 5)\left[(x + 5)^2 - 1\right] =$

$= (x + 5)(x + 5 + 1)(x + 5 - 1) = (x + 4)(x + 5)(x + 6)$.

III. 1. *a)* $A = 2500\ m^2$; $P = 224\ m$ *b)* 896 **c)** 8,96 m^3 **2.** *a)* Ariile fețelor pot fi: $15 \cdot 35 = 525$ $mm^2 = 5{,}25\ cm^2$; $15 \cdot 50 = 750\ mm^2 = 7{,}5\ cm^2$; $35 \cdot 50 = 1750\ mm^2 = 17{,}5\ cm^2$; $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $V_{cutiei} = 15 \cdot 35 \cdot 50 = 26250\ mm^3$; $26250 : 65040 \cong 40$ *bețe*; $V_{zar} = 5^3 = 125\ mm^3$

$26250 : 125 = 210$ zaruri

Testul 19

I. 1. 0; **2.** 4; **3.** 64; **4.** $\frac{3}{5}$; **5.** 125; **6.** 11.

II. 2. $10\% \cdot 240\ lei = 24$ lei; $240\ lei + 24\ lei = 264$ lei; **3.** $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

$x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$; $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 10x + 21} = \frac{x - 5}{x + 7}$;

4. *a)* $ab = \sqrt{(11 + 4\sqrt{7})(11 - 4\sqrt{7})}, ab = \sqrt{121 - 112}$, de unde $ab = 3$. *b)* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = 11 + 4\sqrt{7} - 2 \cdot 3 + 11 - 4\sqrt{7} = 16$ **5.** $a + b = 60$; $a = 2b + 3$;

$3b + 3 = 60 \Rightarrow b = 19$

$a + 19 = 60 \Rightarrow a = 41$

III. 1. *a)* $P_{pătrat} = 4 \times l$; $\begin{matrix} P_{pătrat} = 4 \times 600 = 2400m \\ L_{sârmă} = 5 \times 2400 = 12\,000\ m \end{matrix}$; *b)* $A_{pătrat} = l^2 = 360\,000\ m^2$

$A_{dreptunghi} = A_{pătrat} \Rightarrow A_{dreptunghi} = 360\,000\ m^2$

$400 \times L = 360\,000 \Rightarrow L = 900\ m$; *c)* $A_{dreptunghi} = 360\,000\ m^2 = 36$ ha

$4000 \times 36 = 144\,000$ kg grâu recoltat de pe trenul al doilea; $144\,000 \times 0{,}8 = 115\,200$ lei încasați pe recolta de grâu; **2.** *a)* $V_{apă} = A_b \times h_{apă}$; 80 cm = 8 dm; $\begin{matrix} V_{apă} = l^2 \times h_{apă} = 144 \times 8 = 1152 dm^3 \\ V_{apă} = 1152 dm^3 = 1152\ litri \end{matrix}$

b) $A_l = 4 \times l^2$; $A_l = 4 \times 12^2 = 4 \times 144$; $A_l = 576$ dm^2; *c)* $V_{cub} = l^3$; $V_{cub} = 12^3 = 1728$ dm^3, deci în vas încap 1728 litri apă. Mai sunt necesari: $1728 - 1152 = 576$ litri de apă

Testul 20

I. 1. $\frac{8}{15}$; **2.** 36; **3.** 5; **4.** 1848; **5.** 9; **6.** 7,625.

II. 2. Notăm cu x lungimea întregului drum.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

În prima zi $\frac{2}{7}\cdot x$

În a II-a zi $\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{7}x\right)$

În a III-a zi $\frac{1}{3}\cdot\left[x-\frac{2}{7}x-\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{7}x\right)\right]$

În a IV-a zi 200

Adunând distanţele din cele patru zile se egalează cu x şi se rezolvă ecuaţia. Se obţine $x = 560$ km.

3. Se foloseşte ultima cifră şi se obţine 2. **4.** $\begin{cases}-a+b=0\\a+b=4\end{cases}\Rightarrow a=2, b=2$

III. 1. ***a)*** $A_{pătrat} = l^2 = 360\,000$ m^2; $A_{dreptunghi} = A_{pătrat} \Rightarrow A_{dreptunghi} = 360\,000$ m^2; $400\times L = 360\,000 \Rightarrow L = 900$ m; ***b)*** $A_{dreptunghi} = 360\,000\ m^2 = 36$ ha; $4000\times 36 = 144\,000$ kg grâu recoltat de pe trenul al doilea; $144\,000\times 0{,}8 = 115\,200$ lei încasaţi pe recolta de grâu

2. ***b)*** $A_l = 216\sqrt{2}$ cm^2; $V = 216\sqrt{6}$ cm^3; ***c)*** $d(A,VC) = 12$ cm; d) 90^0.

Testul 21

I. 1. 67; **2.** 39; **3.** 100; **4.** $36\sqrt{3}$ cm^2; **5.** 125 cm^3; **6.** 14.

II. 2. $\frac{a}{11}=\frac{b}{4}$ şi $a = 2b + 30$, $30 < b$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}4a=11b\\a=2b+30\end{cases}$ care are soluţia $a=110, b=40$. **3.** ***a)*** Se rezolvă sistemul $\begin{cases}-(1-m)+m+2n-4=1\\-2(1-m)+m+2n-4=0\end{cases}$ şi se obţine $m = 0$; $n = 3$; deci $f(x)=x+2$. **4.** Se rezolvă ecuaţia $\frac{1}{3}x+150+\frac{25}{100}x=x$ şi se obţine $x=360$ lei.

III. 1. ***a)*** Dimensiunile sunt de 2 dam şi 3 dam. Lungimea celor cinci rânduri de sârmă este de 50 dam. ***b)*** Aria grădinii este de 600 m^2. Sunt necesare 72 kg gazon care costă 900 lei. **2.** ***a)*** 88 cm; ***b)*** $A_t = 320$ cm^2; c) $V = 384$ cm^3=0,384 litri; d) $d(B',AD') = \frac{8\sqrt{34}}{5}$ cm.

Testul 22

I. 1. 4; **2.** -9; **3.** 10,7 m; **4.** 8; **5.** 294 cm^2; **6.** 22.

II. 2. Calculând suma primelor 1996 numere naturale şi înlocuind, numărul devine: $1997+2\cdot\frac{1996\cdot 1997}{2}=1997^2$ care este un pătrat perfect. **3.** ***b)*** $A(-1,-1)\in G_f$. **4.** a trebuie să fie par, b trebuie să fie divizibil cu 5. Răspuns final: numărul este 25. **5.** $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

III. 1. ***a)*** Cele şase "sectoare" sunt triunghiuri congruente. Deci, $A = 6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ dam^2. ***b)*** Aria triunghiului se exprimă în două moduri: cu formula $A=\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$ şi numeric, cu valoarea de la ***a)***. Egalând, obţinem $l=4$ dam, deci lungimea gardului exterior este egală cu 12 dam. **2.** ***b)*** $A_l = 81\sqrt{39}$ cm^2; $V = 486\sqrt{3}$ cm^3 ***c)*** $\frac{18\sqrt{13}}{13}$ cm; d) 60^0.

Testul 23

I. 1. 12; **2.** 72; **3.** $5\sqrt{3}$; **4.** 10; **5.** 13; **6.** 17.

II. 2. Folosim faptul că $8>\sqrt{65}$. Se obține soluția 2. **3.** ***b)*** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. **4.** Fie x numărul locuitorilor care erau în oraș acum doi ani, atunci putem scrie ecuația $\left(x+\frac{10}{100}x\right)+\frac{10}{100}\left(x+\frac{10}{100}x\right)=484000$, care are soluția x = 400 000 (locuitori erau acum doi ani) **5.** $E(x)=2x$.

III. 1. ***a)*** Folosind proprietatea medianei din vârful unghiului drept, rezultă că traseele sunt egale. ***b)*** Cele două triunghiuri au ariile egale și egale cu jumătate din aria triunghiului ABC. Deci, fiecare triunghi are aria de 12 m^2. ***c)*** Suma distanțelor este egală cu 4 + 3 = 7 cm. **2.** ***a)*** $(L-l)^2=25$ și $L+l=13, h=\sqrt{L\cdot l}$; ***b)*** 228 cm^2; ***c)*** 18.

Testul 24

I. 1. 7; **2.** 128; **3.** $\frac{12}{5}=2,4$; **4.** 55°; **5.** $5\sqrt{3}$; **6.** $\frac{29}{50}$.

II. 2. x = 1; y = 5; z = 15 ; t = 30 . 3. $\{3,0,-5,\sqrt{4}\}$ și $\{-\sqrt{2},\sqrt{3},\pi\}$. **4.** ***b)*** Se rezolvă ecuația $f(x)=g(x)$ și se obține $x=\frac{9}{10}$. Coordonatele punctului de intersecție sunt $I\left(\frac{9}{10},\frac{13}{10}\right)$; c) $x=\frac{14}{23}$

III. 1. ***a)*** $l=5\sqrt{2}$ m. Deci aria pătratului mic este $A=50$ m^2. Trebuie cumpărate 200 kg ciment. ***b)*** Restul suprafeței este de 50 m^2. Sunt necesare 12,5 kg gazon care costă 156,25 lei. **2.** ***b)*** Din triunghiul MCD (dreptunghic în C) calculăm $MD=6\sqrt{2}$ cm și cum $MD'=12$ cm rezultă $DD'=6\sqrt{2}$ cm, $V=432\sqrt{2}$ cm^3; ***c)*** unghiul dintre $(D'AM)$ și (DAM) este unghiul $D'MD$ a cărui măsură este de 45 °; ***d)*** $d(C,(AD'M))=CF$ și $CF=3$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

A. C. MĂINESCU • C. LAZĂR

Testul 25

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-3	8	$[1,6)$	12π	60	21
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$\overline{ab}=3b+a$ şi $b>a$	2p
	$9a=2b$ şi $(2;9)=1$	2p
	$\overline{ab}=29$	1p
3.	Se notează cu x lungimea traseului	1p
	În prima zi parcurge $30\%\cdot x=\frac{6x}{20}$	1p
	În a doua zi parcurge $\frac{1}{2}\cdot 70\%\cdot x=\frac{7x}{20}$ $x-\frac{6x}{20}-\frac{7x}{20}=14$ $x=40$ km	1p 1p 1p
4.	*a)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
	b) $A(2m,-7)\in G_f \Rightarrow f(2m)=-7$ $f(2m)=-4m+1$ $-4m+1=-7$ $m=2$	2p 1p 1p 1p
5.	$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ $x^2-4x+4=(x-2)^2$ $\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+a}{x+b}$ $a+b=-5\in\mathbb{Z}$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* Lungimea muchiei cubului este egală cu 2 dm $V_{cub}=V_{miere}=8$ dm^3 $V_{miere}=8$ litri	1p 2p 2p
	b) $V_{miere}=2$ litri $=2$ dm$^3=2000$ cm^3 Notăm cu h înălțimea cerută și astfel $V_{miere}=20\cdot 20\cdot h=2000$ cm^3 $h=5$ cm	1p 3p 1p
	c) Desfășurăm $BCC'B'$ în planul $ABB'A'$	2p

Scanned with OKEN Scanner

	Drumul cel mai scurt se obține atunci când punctele A, M și C' sunt coliniare $[BM]$ linie mijlocie în triunghiul ACC' $BM=10$ cm	1p 1p 1p
2.	*a)* $A_1=A_2=\frac{4\cdot 2}{2}=4$ dam^2 $A_3=\frac{2\cdot 2}{2}=2$ dam^2 Aria suprafeței cu gazon este egală cu $2\cdot A_1+A_3=10$ dam^2	2p 1p 2p
	b) Aria suprafeței terenului este egală cu $4^2=16$ dam^2 Aria suprafeței cu flori este egală cu $16-10=6$dam^2 $6<10$, deci aria suprafeței cu flori nu este mai mare decât aria suprafeței cu gazon	2p 2p 1p
	c) Folosind teorema lui Pitagora obținem $AB=AC=2\sqrt{5}$ dam și $BC=2\sqrt{2}$ dam Perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ dam $4\sqrt{5}=\sqrt{80}<\sqrt{81}=9$ și $2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}<9+3=12$ dam	2p 1p 1p 1p

Testul 26

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-2	$\frac{3}{5}$	$(-\infty;3)$	24	90	9
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic	4p 1p
2.	$9\cdot\overline{ab}=2\cdot\overline{ba}$	2p
	$8a=b$	2p
	$\overline{ab}=18$	1p
3.	$m=24+f$	1p
	$m+7=4(f+7)$	2p
	$f=1$ $m=25$	1p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct	2p 2p
	Trasarea graficului funcției	1p
	b) $A(p,4)\in G_f\Rightarrow f(p)=4$	2p
	$f(p)=5-3p$	1p

Scanned with OKEN Scanner

	$5-3p=4$	1p
	$p=\frac{1}{3}$	1p
5.	$\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x^2-4}=\frac{7x}{(x-2)(x+2)}$	3p
	$\frac{x^2+4}{x^2-4}+1=\frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $CM=12-x$ Aplică teorema lui Pitagora și obține $CF=\sqrt{256+(12-x)^2}$	3p 2p
	b) $A_{ABCD}=12^2=144$ dam^2 $A_{BEFM}=12x$ dam^2 $A_{teren}=144+16x=16(9+x)$ dam^2	2p 2p 1p
	c) $A_{teren}=16(9+x)=272$ dam^2 272 dam^2 = 2,72 ha 2,72 · 2,8=7,616 tone grâu	2p 1p 2p
2.	*a)* $A_{corp}=A_{cub}$ $A_{cub}=6l^2=384$ cm^2	2p 3p
	b) $V_{cub}=l^3=512$ cm^3 $V_{decupat}=8l^3=64$ cm^3 Finalizare	2p 2p 1p
	c) $V_{decupat}=8x^3$ cm^3 $8x^3=256\Rightarrow x^3=32$ și $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\varnothing$.	2p 3p

Testul 27

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	4	2	$4\sqrt{2}$	9 cm	45°	$\frac{3}{4}$
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul Notează cubul	4p 1p

Scanned with OKEN Scanner

2.	$2-4\sqrt{2}+4-(2-2\sqrt{2}+1)=2-2\sqrt{2}+1$	**2p**
	$6-4\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$	**2p**
	$3-2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$	**1p**
3.	a-b=18	**2p**
	a=3·b+2	**2p**
	a=26, b=8	**1p**
4.	**a)** Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct	**2p** **2p**
	Trasarea graficului funcției	**1p**
	b) $A(m,-2)\in G_f \Rightarrow f(m)=-2$	**2p**
	$-m+1=-2$	**1p**
	$-m=-3$	**1p**
	$m=3$	**1p**
5.	$x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$	**1p**
	$x^2-9=(x-3)(x+3)$	**1p**
	$\frac{2x^2-7x-17-x^2+3x-x+3}{(x-7)(x-3)}\cdot(x-3)(x+3)=\frac{x^2-5x-14}{x-7}\cdot(x+3)=$	**2p**
	$\frac{(x-7)(x+2)}{x-7}\cdot(x+3)=(x+2)(x+3)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $OC=\sqrt{VC^2-VO^2}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$cm $AC=\frac{12\sqrt{10}}{5}$cm, $AB=\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{288\sqrt{15}}{25}$cm^3	**1p** **2p** **2p**
	b) $OM=\frac{AB}{2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$cm $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm $\Rightarrow [VM]=[AB]$	**2p** **3p**
	c) $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=6$cm $AE\perp VM$ $VA=AM=6$cm $\Rightarrow \Delta VAM$ isoscel și AE = înălțime $\Rightarrow AE$ = mediană $\Rightarrow VE=\frac{VM}{2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$cm	**1p** **2p** **2p**
2.	*a)* R=10 m Aria suprafeței lacului= π R^2 =100 π cm^2	**2p** **3p**

Scanned with OKEN Scanner

	b) Aria supraf. cu gazon=Aria suprafeței zonei de agrement -Aria suprafeței lacului Aria suprafeței cu gazon=$600-100\pi$ m^2 314<Aria suprafeței lacului<315 285<Aria suprafeței cu gazon<286 Aria suprafeței cu gazon<Aria suprafeței lacului	2p 1p 1p 1p
	c) $A_{\triangle DPM} = A_{ABCD} - A_{\triangle DAP} - A_{\triangle DCM} - A_{\triangle PBM}$ $A_{\triangle DPM} = 600 - 200 - 150 - 50$ $A_{\triangle DPM} = 200\,m^2$	2p 2p

Testul 28

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	154	$\frac{35}{36}$	[5,8)	30	$16\sqrt{3}$	7,5
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic	4p 1p
2.	$100a+10b+c=a+10b+100c \Rightarrow a=c$ Nr. cazuri posibile = 90 $\overline{abc}:5 \Rightarrow c=5 \Rightarrow$ Nr. cazuri favorabile = 10 $P=\frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile}=\frac{1}{9}$	2p 1p 1p 1p
3.	x – prețul inițial 100% x –20% x = 80% x = y (noul preț după ieftinire) 100% y + 20% y = 1152 lei $120\%\ y = 1152 \Rightarrow y = 960$ lei $80\%\ x = 960 \Rightarrow x = 1200$ lei	2p 1p 1p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
	b) $A(x;0) \in G_f \Rightarrow f(x)=0$ $2\cdot x-4=0$ $2x=4$ $x=2$	2p 1p 1p 1p

Scanned with OKEN Scanner

5.	$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$	1p
	$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$	1p
	$x^2-1=(x+1)(x-1)$	1p
	$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}=\frac{(x+1)}{(x-1)}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-4}{x^2-1}$	1p
	$\frac{x^2-4}{x^2-1}:\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{1}=x^2-4$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $AB\perp BB'$, $BC\perp BB'$, $AM\perp BC\Rightarrow AM\perp (BB'C')\Rightarrow d(A,(BB'C'))=AM$	3p
	$\triangle ABC$ echilateral, AM înălțime $\Rightarrow AM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m	2p
	b) $V_{cort}=A_b\cdot h$	1p
	$A_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\text{m}^2$	2p
	$V_{cort}=\frac{45\sqrt{3}}{4}\text{m}^3$	2p
	c) $A_t=A_l+2\cdot A_b$	1p
	$A_l=P_b\cdot h=45\ \text{m}^2$	1p
	$A_t=45+\frac{9\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2$	2p
	$45+\frac{9\sqrt{3}}{2}<54\Rightarrow\frac{9\sqrt{3}}{2}<9\Rightarrow\sqrt{60,75}<\sqrt{81}\Rightarrow$ sunt suficienți cei 54 m^2 de pânză pentru confecționarea cortului	1p
2.	*a)* $A_{parcelă}=\frac{A_{ABCD}}{4}$	2p
	$A_{parcelă}=\frac{100}{4}=25\ \text{m}^2$	3p
	b) $A_{parcelă}=l^2\Rightarrow l=5\text{m}$	2p
	$P_{parcelă}=4l=20\text{m}\Rightarrow l_{gard\ parcelă}=20\text{m}$	2p
	$l_{gard\ grădină}=P_{grădină}+4\cdot l=40+20=60\text{m}$	1p
	c) Din grădină se recoltează $50\cdot 4=200$kg roșii	2p
	$1\text{kg}=2,5\text{lei}\Rightarrow 200\text{kg}=500\text{lei}$	3p

Testul 29

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-4	9	15	36 cm^2	$6\sqrt{3}$ cm	vineri
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$M_a = \dfrac{a^2+b^2+2ab}{3}$ $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=6^2=36$ Finalizare: 12	2p 2p 1p
3.	x=suma de bani pe care o deține Radu y=suma de bani pe care o deține Alexandra x+y=10 Cartea costă 10 – 5 = 5 lei Alexandra a avut inițial 5 lei + 1 leu + 2 lei și 50 de bani = 8 lei și 50 de bani	1p 2p 2p
4.	*a)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
	b) $A(5,3a+1)\in G_f \Rightarrow f(5)=3a+1$ $-5+3=3a+1$ $3a=-3$ $a=-1$	2p 1p 1p 1p
5.	$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}:\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}=\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+4}=\dfrac{x+1}{x+2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $V_{paralelipiped}=a\cdot b\cdot c=48\,\text{m}^3$ $36\cdot V_{paralelipiped}=1728\,\text{m}^3$ $V_{cub}=l^3=36\cdot V_{paralelipiped}\Rightarrow l^3=1728\Rightarrow l=12\,\text{m}$	1p 1p 3p
	b) $A_t=6l^2=864\,\text{m}^2$	5p
	c) $P=\dfrac{nr.cazuri\ \ favorabile}{nr.cazuri\ \ posibile}$ nr. cazuri posibile = 144, nr. cazuri favorabile = 72 $P=\dfrac{1}{2}$	1p 2p 2p
2.	*a)* $A_{gazon}=A_{ABCD}-A_{MNPQ}$ $A_{ABCD}=L\cdot l=40\cdot 20=800\,\text{m}^2$ $A_{MNPQ}=L\cdot l=20\cdot 10=200\,\text{m}^2$ $A_{gazon}=600\,\text{m}^2$	2p 1p 1p 1p

Scanned with OKEN Scanner

	b) Notăm AM = x AC = AM + MP + PC = MP + 2x $MP = \sqrt{MQ^2 + QP^2} = 10\sqrt{3}$ m $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 20\sqrt{3}$ m $x = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ m	1p 1p 1p 2p
	c) $A_{MNPQ} = L \cdot l = 20 \cdot 10 = 200$ m^2 200 : 25 = 8 8 < 9 $\Rightarrow$ există cel puțin 2 pești pe o suprafață de 25m^2	1p 2p 2p

Testul 30

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	2,2	B	2	7	$5\sqrt{2}$	(0;2),(2;4),(5;7)
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$A = \{5,6,...,a\}$ $B = \{0;3;6;9;12;15...\}$ $C_{A\cap B} = 20 \Rightarrow A \cap B = \{6,9,12,...,63\} \Rightarrow a \in \{63,64,65\}$	1p 1p 3p
3.	Fie x = număr răspunsuri corecte , y = număr răspunsuri greșite $x + y = 100$, $5x - 3y = 340$ Finalizare: x =80	2p 2p 1p
4.	a) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
	b) $A(0;y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y$ $2 \cdot 0 - 2 = y$ $y = -2$	2p 2p 1p
5.	$\frac{2x+1}{x-2} + \frac{1-2x}{x+2} = \frac{(x+2)(2x+1)+(x-2)(1-2x)}{(x-2)(x+2)} = \frac{10x}{x^2-4}$ $\frac{10x}{x^2-4} + \frac{x^2+16}{x^2-4} = \frac{x^2+10x+16}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x+8)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+8}{x-2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	*a)* $V_{apă} = 4l = 4\,\text{dm}^3 = 4000\,\text{cm}^3$ $V_{apă} = V_{prismă} = A_b \cdot h_{apă} = l^2 \cdot 8 \Rightarrow l = 10\sqrt{5}$ cm	2p 3p

Scanned with OKEN Scanner

	b) $A_t = 6l^2 = 6 \cdot 500 = 3000\,\text{cm}^2$	5p
	c) $V_{cub} = l^3 = 5000\sqrt{5}\,\text{cm}^3 = 5\sqrt{5}$ litri $V_{apă\ necesar\ umplerii\ cubului} = V_{cub} - V_{apă} = (5\sqrt{5} - 4)$ litri	2p 3p
2.	*a)* $A_{ABCD} = A_{AMPD} + A_{BMPC} = 49\,\text{m}^2$ $A_{ABCD} = l^2 = 49\,\text{m}^2 \Rightarrow l = 7\,\text{m}$	2p 3p
	b) $A_{\Delta APB} = \frac{A_{AMPD}}{2} + \frac{A_{BMPC}}{2}$ $A_{\Delta APB} = \frac{49}{2} = 24{,}5\,\text{m}^2$	3p 2p
	c) Se recoltează 30 kg roşii de pe 15 $\text{m}^2 \Rightarrow 30:15 = 2$kg de pe 1$\text{m}^2$ $2\,\text{kg} \cdot 34 = 68\,\text{kg}$ de pe 34 m^2	2p 3p

Testul 31

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-3	100	0	4 cm	18 cm^2	75
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează cubul Notează cubul	4p 1p
2.	$a \cdot b = 18,\ b \cdot c = 36,\ a \cdot c = 24$ $\frac{ab}{bc} = \frac{18}{36} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2a$ $2a^2 = 24 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}, c = 4\sqrt{3}, b = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$	1p 2p 2p
3.	Fie x - nr. elevi, y - nr. bănci $2(y-2)+1 = x,\ 3(y-6) = x$ $2y - 4 + 1 = 3y - 18$ Finalizare: $y = 15$	1p 2p 2p 1p
4.	*a)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	1p 1p 3p
	b) $A(m+1, 2m) \in G_f \Leftrightarrow f(m+1) = 2m$ $f(m+1) = 3(m+1) - 6 = 3m - 3$ Finalizare: $m = 3$	2p 2p 1p
5.	$-6 < x < 6 \mid +2$ $-4 < x + 2 < 8 \mid :3$ $-\frac{4}{3} < \frac{x+2}{3} < \frac{8}{3}$ determinarea necunoscutei: $x = \{-1, 0, 1, 2\}$	1p 1p 1p 1p 1p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $V_{prismă} = A_b \cdot h$	1p
	$A_{\triangle ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^3	2p
	$V_{ABCMNP} = 54\sqrt{3}$ cm^3	2p
	b) Triunghiul MNC este isoscel cu $MC = NC$	1p
	$d(C, MN) = CQ$ unde Q este mijlocul laturii MN	2p
	$CQ = \sqrt{MC^2 - MQ^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ cm	2p
	c) Determinarea unghiului diedru.	2p
	$\sin(\sphericalangle((ABP),(ABC))) = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$	3p
2.	*a)* $EB = AB - AE = 6$ cm	1p
	$BC = \sqrt{CE^2 + EB^2} = 10$ cm	2p
	Perimetrul patrulaterului ABCD este egal cu 32 cm	2p
	b) Aria suprafeței BEC este egală cu $\frac{CE \cdot EB}{2} = 24$ cm^3	1p
	Aria suprafeței cu grâu este egală cu $AD \cdot AE = 32$cm^2	1p
	$p\%$ din $A_{ADCE} = A_{BEC}$	1p
	$\frac{p}{100} \cdot 32 = 24 \Rightarrow p = 75\,\%$	2p
	c) Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul AEC obținem $AC = 4\sqrt{5}$ cm	1p
	Triunghiul ABC este isoscel cu AB = BC $\Rightarrow d(B, AC) = BM$, unde M este mijlocul lui AC	2p
	Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul MBC obținem $MB = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{100 - 20} = 4\sqrt{5}$ cm	2p

Testul 32

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-17	3	7	6 cm	45°	60
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida	4p
	Notează piramida	1p
2.	$(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)^2 =$	2p
	$3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2(3-1) + 3 - 2\sqrt{3} + 1 =$	2p
	$4 \in \mathbb{N}$	1p
3.	Fie x prețul inițial. După reducerea cu 25%, televizorul costă $75\% \cdot x = \frac{3}{4}x$	1p

Scanned with OKEN Scanner

	După mărire, ajunge la $\frac{3x}{4}+20\%\cdot\frac{3x}{4}=\frac{9x}{10}$	2p
	$\frac{9x}{10}=3600\Rightarrow x=4000$	2p
4.	*a)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 1p 2p
	b) $A(m+1,-7)\in G_f\Rightarrow f(m+1)=-7$	3p
	$m=2$	2p
5.	$x^2-1=(x-1)(x+1)$	2p
	$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$	2p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $V_{cub}=a^3$, unde a este lungimea muchiei	3p
	$V_{cub}=1000\ \text{cm}^3$	2p
	b) $A_{lat}=P_b\cdot h=2\cdot(L+l)\cdot h$	3p
	$A_{lat}=2100\ \text{cm}^2$	2p
	c) Dacă x exprimă cu cât a scăzut nivelul apei după golirea unei părți în cub, atunci volumul apei din cub este egal cu al paralelipipedului dreptunghic de bază $ABCD$ și înălțime egală cu x	3p
	$x=\frac{V_{cub}}{L\cdot l}=\frac{1000}{25\cdot 10}=4\ \text{cm}$	2p
2.	*a)* $A_{albastră}=MN\cdot NP$	3p
	$A_{albastră}=60\ \text{cm}^2$	2p
	b) $A_{coală}=AB\cdot BC=96\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{albă}=A_{coală}-A_{albastră}=36\ \text{cm}^2$	2p
	$A_{albă}<A_{albastră}$	1p
	c) Fie $NE\perp DC$, $E\in DC$; atunci $DE=2$, $NE=2$	2p
	Triunghiul END este dreptunghic în E, deci $DN^2=DE^2+NE^2$	2p
	$DN=2\sqrt{2}\ \text{cm}$	1p

Testul 33

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	–353	36 lei	3	$2\sqrt{17}$	50	24
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida Notează piramida	4p 1p
2.	$a+b\leq 48$ $a:b=5$ rest $6, b>6$ $a=5\cdot b+6$ $6\cdot b+6\leq 48$ $b\leq 7$ şi $b>6\Rightarrow b=7$ $a=41$	1p 1p 1p 1p 1p
3.	$m_g=\sqrt{x\cdot y}$ $m_g=\sqrt{(2\sqrt{3}+2\sqrt{2})\cdot\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$	2p 2p
	$m_g=2$	1p
4.	$A(-2,m+6)\in G_f\Leftrightarrow f(-2)=m+6$ $-2(m+1)+5=m+6$ $-3m=3$, deci $m=-1$	2p 2p 1p
5.	*a)* $E(x)=\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}+\frac{1}{x-3}$ $E(x)=1+\frac{1}{x-3}$ $E(x)=\frac{x-2}{x-3}$	2p 1p 2p
	b) $\frac{x-2}{x-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x-3)\mid(x-2)$ $(x-3)\mid(x-3)\Rightarrow(x-3)/(x-2-x+3)\Rightarrow(x-3)/1\Rightarrow(x-3)\in D_1=\{-1,1\}$ $x\in\{2,4\}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* $A_l=P_b\cdot h$ $324\sqrt{6}=36\sqrt{2}\cdot h$ $h=9\sqrt{3}$ m	1p 2p 2p
	b) $V_{cutie}=A_b\cdot h$ $V_{cutie}=1458\sqrt{3}\,m^3\cong 2522{,}34\ m^3$ $V_{pachet}=L\cdot l\cdot h=3\cdot 4\cdot 6=72\,m^3$ $2522{,}34:72=35{,}0325\Rightarrow$ încap 34 pachete în cutie	1p 2p 1p 1p
	c) Fie $AC\cap BD=\{O\}$ $FB\perp(ABCD)$, $AC\subset(ABCD)$ $BO\perp AC, BO\subset(ABCD)\Rightarrow FO\perp AC\Rightarrow d(F,AC)=FO$ $FO=\sqrt{FB^2+OB^2}=\sqrt{243+81}=\sqrt{324}=18\,m$	2p 1p 2p
2.	a) $L_{gard}=AB+BC+CD+DA$	1p

Scanned with OKEN Scanner

	$AD=BC=2\sqrt{2}$ m $AB=8$ cm $L_{gard}=(12+4\sqrt{2})$ m	1p 1p 2p
	b) Aria suprafeței grădinii $=3\cdot A_{\triangle ADE}=3\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}=3\cdot 4=12\,\text{m}^2$ $9\cdot 12=108$ butași	3p 2p
	c) Construim $CF\perp AB$ $CF=\dfrac{EC\cdot CB}{EB}=2$ m Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACF obținem: $AC=\sqrt{AF^2+FC^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ m	1p 2p 2p

Testul 34

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	-5	4	$\frac{2}{5}$	6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$27°$
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul Notează cubul	4p 1p
2.	$A=\sqrt{(2013-1)^2}$	2p
	$A=\sqrt{2012^2}$	2p
	$A=2012\in\mathbb{N}$	1p
3.	Se notează cu x numărul pachetelor de 20 g	1p
	$20x+(128-x)\cdot 25=3000$	2p
	$\Rightarrow x=40$ pachete de 20 g $128-40=88$ pachete de 25 g	1p 1p
4.	*a)* Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
	b) $M(a,a+1)\in G_f\Rightarrow f(a)=a+1$ $f(a)=3-a$ $3-a=a+1$ $a=1$	2p 1p 1p 1p

Scanned with OKEN Scanner

5.	$x^2-6x+9=(x-3)^2$ $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ $E(x)=\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{x-3}{x+2}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $V=L\cdot l\cdot h$ $V=14\cdot 8\cdot 4=448\,\text{m}^3$	3p 2p
	b) $A_{bazei}=14\cdot 8=112\,\text{m}^2$ x,z,y ariile suprafețelor necesare fiecărei echipe $\{x,y,z\}$ direct proporțional cu $\{3,5,6\}\Rightarrow\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}=k$ $\left.\begin{array}{l}x=3k,y=5k,z=6k\\x+y+z=112\end{array}\right\}\Rightarrow k=8\ \text{cm}^3$ $x=24\,\text{m}^2,y=40\,\text{m}^2,z=48\,\text{m}^2$	1p 2p 1p 1p
	c) $A_{plafon}=112\,\text{m}^2$ $A_{laterala}=P_{bazei}\cdot h=176\,\text{m}^2$ $A_{pavilion}=A_{plafon}+A_{laterală}=288\,\text{m}^2$ Fie x numărul de metri de prelată folosit $A_{prelată}=1{,}50\cdot x\Rightarrow 1{,}50\cdot x=288\Rightarrow x=\dfrac{288}{1{,}50}=192\,\text{m}$	2p 1p 2p
2.	*a)* $A_{parc}=L\cdot l=157000\,\text{m}^2$ $A=\dfrac{20}{100}\cdot 157000=31400\,\text{m}^2$ aria zonei plantate cu flori	2p 3p
	b) $A_{cerc}=\pi R^2\pm\ \text{dam}^2$ Aria suprafeței cu flori este egală cu $31400=3{,}14\cdot R^2\Rightarrow R^2=10000$ $R=\sqrt{10000}=100\,\text{m}$	2p 2p 1p
	c) $L_{gard}=2(L+l)+2\pi R$ $L_{gard}=2(157+1000)+2\cdot 3{,}14\cdot 100=2942\,\text{m}$ Prețul gardului este $2942\cdot 14{,}5=42659$ lei	2p 2p 1p

Testul 35

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	6	6	$\frac{1}{2}$	16 cm²	60°	$\frac{65}{9}$
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează tetraedrul Notează tetraedrul	4p 1p
2.	$-2 \le 3x+1 \le 8 \Leftrightarrow -3 \le 3x \le 7 \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{7}{3}$ $A=\{-1,0,1,2\}$ $A \cap \mathbb{N} = \{0,1,2\}$	3p 1p 1p
3.	$\left.\begin{matrix} a+b+c=120 \\ a+c=4b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4b+b=120 \Rightarrow b=24$	2p
	$a=16$ $16+24+c=120 \Rightarrow c=80$	1p 1p
4.	*a)* $G_f \cap G_g \Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow 2x-1=x+1 \Rightarrow x=2$ $f(2)=3$ $A(2,3)$	2p 2p 1p
	b) $G_f \cap Oy \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow B(0,-1)$	1p
	$G_g \cap Oy \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ g(0)=1 \end{cases} \Rightarrow C(0,1)$ Reprezintă grafic cele două funcții $A_{\triangle ABC}=\frac{2 \cdot 2}{2}=2$	1p 2p 1p
5.	$(2x+1)(1-2x)=1-4x^2$ $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$ $-3(4x-1)=-12x+3$ $E(x)=1-4x^2+4x^2+12x+9-12x+3=13$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $A_{totală}=2(L \cdot l+L \cdot h+h \cdot l)$ $L=2,5\text{m}=250\text{cm}, h=0,8\text{m}=80\text{cm}$ $A_{totală}=2(250 \cdot 30+250 \cdot 80+30 \cdot 80)=59800\text{cm}^2=5,98\text{m}^2$	2p 1p 2p
	b) $V=L \cdot l \cdot h$ $V=250 \cdot 30 \cdot 80\text{cm}^3=600000\text{cm}^3$ $V=600000\text{cm}^3=600\text{ dm}^3=600\text{litri}$	2p 1p 2p
	c) $\frac{10}{100} \cdot 420=42\text{lei}$ Prețul plătit începând cu al șaselea calorifer $420-42=378\text{lei}$ Prețul total plătit este $420 \cdot 5+378 \cdot 4=3612\text{lei}$	2p 1p 2p

Scanned with OKEN Scanner

2.	*a)* $A_{ABCD} = AB \cdot BC = 2400\text{cm}^2$ $\left.\begin{array}{l} A_{\triangle AMD} + A_{DCBM} = A_{ABCD} \\ A_{DCBM} = 5A_{\triangle AMD} \end{array}\right\} \Rightarrow 6A_{\triangle AMD} = 2400\text{cm}^2 \Rightarrow A_{\triangle AMD} = 400\text{cm}^2$ $A_{\triangle AMB} = \frac{AD \cdot AM}{2} \Rightarrow AM = 20\text{cm}$	1p 2p 2p
	b) $P_{dreptunghi} = 2(L+l) = 20\text{cm}$ $AM = 30\text{cm}$ Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle AMD \Rightarrow MD^2 = AD^2 + AM^2 \Rightarrow MD = 50\text{cm}$ $P_{\triangle AMD} = AM + AD + MD = 120\text{cm}$ $\frac{x}{100} \cdot 200 = 120 \Rightarrow x = 60\%$	1p 3p 1p
	c) $\{AM, MB\}$ invers proporționale cu $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{2} = \frac{MB}{4} = k$	2p
	$\left.\begin{array}{l} AM = 2k, MB = 4k \\ AM + MB = AB \end{array}\right\} \Rightarrow k = 10$	2p
	$AM = 20\text{cm}, MB = 40\text{cm}$	1p

Testul 36

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	10	0	$\frac{2}{5}$	540 cm	$2\sqrt{3}$ cm	13
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează prisma Notează prisma	4p 1p
2.	$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} \Rightarrow a = \frac{2b}{5}$	1p
	$3 \cdot b = 4 \cdot c \Rightarrow c = \frac{3b}{4}$ $c - a = 14$ $\frac{3b}{4} - \frac{2b}{5} = 14 \Rightarrow 15b - 8b = 280$	1p 1p 1p
	$b = 40$ $a = 16, c = 30$	1p
3.	$a = 4 - \left(-2 + \sqrt{5}\right) - \left(3 - \sqrt{5}\right)$ $a = 3$	3p 2p
4.	*a)* $A(0,-2) \in G_f \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow b = 4$ $B(1,2) \in G_f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a = 4$	3p 2p

Scanned with OKEN Scanner

	b) Reprezintă un punct Reprezintă al doilea punct Trasarea graficului funcției	2p 2p 1p
5.	$a^2-4a+4+9b^2+6b+1=0$ $(a-2)^2+(3\cdot b+1)^2=0$ $a=2, b=-\frac{1}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	*a)* $A_t=4\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $A_t=9\sqrt{3}\ \text{cm}^3$	2p 3p
	b) $\sin x=\frac{h}{a_b}$ $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{6}$	2p 3p
	c) Fie punctul M mijlocul segmentului $[AB]$ $[PT]$ este linie mijlocie în triunghiul AMD $PT=\frac{DM}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$	1p 2p 2p
2.	*a)* $L_{roată}=2\pi R$ $8\pi=2\pi R\Rightarrow R=4\text{cm}$ AC=8 cm	2p 2p 1p
	b) $m\sphericalangle(AOB)=60^\circ$ $\triangle AOB$ echilateral Aria suprafeței $AOB=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	1p 2p 2p
	c) $L_{roată}=8\cdot 3{,}14=25{,}12\text{cm}=0{,}2512\text{m}$ $L_{pistă}=800\text{m}$ Numărul rotațiilor complete pe care le face roata pentru a parcurge pista este egal cu: 800:0,2512=3184	2p 1p 2p

Testul 37

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	0	45	$\frac{9}{2}$	$6\sqrt{3}$ cm	90°	7,84
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează paralelipipedul Notează paralelipipedul	4p 1p
2.	Presupunând $b \neq 0$, atunci $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, absurd $b = 0, a = 0$	3p 2p
3.	$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = (x-2)^2 + (y-3)^2$ $x = 2, y = 3$	3p 2p
4.	*a)* Reprezentarea unui punct de pe grafic Reprezentarea altui punct de pe grafic Trasarea graficului (o dreaptă)	2p 1p 2p
	b) $f(1) + f(2) + ... + f(50) = 2 \cdot (1 + 2 + ... + 50) + 50$ $1 + 2 + ... + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2}$ $f(1) + f(2) + ... + f(50) = 2600$	2p 2p 1p
	c) $P(a^2, 4a+1) \in G_f \Rightarrow f(a^2) = 4a + 1$ $a^2 = 2a$ $a \in \{0, 2\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$; atunci $BE = AB - CD = x - 6$ şi $CE = AD = 30$ $BC^2 = CE^2 + BE^2 \Rightarrow x^2 = (x-6)^2 + 30^2 \Rightarrow x = 78$ m $P_{ABCD} = 4x + 26 = 338$ m	1p 2p 2p
	b) $A_{ABCD} = \frac{AD \cdot (AB + CD)}{2}$ $A_{ABCD} = 3450$ m^2	3p 2p
	c) $MN = \frac{AB + CD}{2} = 115$ m $P_{ABMN} = 320$ m	2p 3p
2.	*a)* $V_{gheaţă} = L_{gheaţă} \cdot l_{gheaţă} \cdot h_{gheaţă}$ $V_{gheaţă} = 960$ dm^3	3p 2p
	b) $V_{bazin} = \frac{H}{3}\left(L^2 + l^2 + L \cdot l\right)$, unde L şi l sunt laturile bazelor trunchiului $V_{bazin} = \frac{7840}{3}$ dm^3	3p 2p
	c) Apa are volumul unui trunchi de piramidă cu înălţimea $H' = 5$ dm, baza mare de latură $L = 20$ dm şi baza mică de latură $a = \frac{L + l}{2} = 16$ dm $V_{apă} = \frac{H'}{3}\left(L^2 + a^2 + L \cdot a\right) = \frac{4880}{3}$ dm^3 $V_{apă} + V_{gheaţă} = \frac{4880}{3} + 960 = \frac{7760}{3} < \frac{7840}{3} = V_{bazin}$	1p 2p 2p

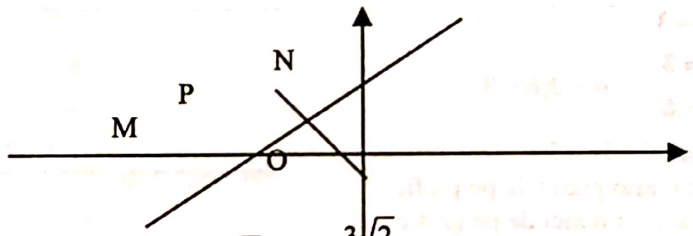
Scanned with OKEN Scanner

Testul 38

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	9	7	400	137°30'	60°	- 4°
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează piramida Notează piramida.....	4p 1p
2.	x numărul băieților,2x numărul fetelor $x + 2x = 33$, $3x = 33$, $x = 11$ baieti $11.2 = 22$ fete	2p 2p 1p
3.	$n = 5\sqrt{11} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{11} - \sqrt{11}$ $n = 0$	3p 2p
4.	*a)* $f(1) = 4$ $a - 2 + 3 = 4$ $a = 3$	2p 2p 1p
	b) $f:R \to R, f(x) = x + 3$, $M(-3,0)$, $N(0,3)$  $OM = 3; ON = 3; MN = 3\sqrt{2}; OP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$	2p 2p 1p
5.	$(x+3)^3 - 16(x+3) = (x+3)[(x+3)^2 - 16]$ $(x+3)(x+3-4)(x+3+4) = (x+3)(x-1)(x+7)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* $4CB = 40$, $CB = 10$ dam; $EB = 6$ dam; $DC = AB - 2EB = 18 - 12 = 6$ dam $A_{ABCD} = 96$ ari	3p 2p
	b) $A_{BEC} = 24$ ari $96.p\% = 24$; $p = 25\%$	3p 2p
	c) $P_{ABCD} = 36$ dam $= 360$ m $360.15{,}5 = 5580$ lei	3p 2p
2.	*a)* $A = 2(L.l + L.h + l.h) = 3{,}88$ m^2 pt.un calorifer $3{,}88 .12 = 46{,}56$ m^2	3p 2p
	b) $V = L.l.h = 0{,}28$ m^3 $0{,}28$ m^3 $= 280$ dm^3 $= 280$ l	3p 2p
	c) $46{,}56 . 35 = 1629{,}6$ lei	5p

Scanned with OKEN Scanner

Testul 39

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	0	F	8	24	90°	220
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează prisma Notează prisma.....	4p 1p
2.	$4x^2-4\sqrt{3}x+(\sqrt{3})^2+y^2+2\sqrt{2}y+(\sqrt{2})^2=0$ $(2x-\sqrt{3})^2+(y+\sqrt{2})^2=0$ $x=\frac{\sqrt{3}}{2};y=\sqrt{2}$	2p 2p 1p
3.	$x+y+3z+6x+4y=x+y+3z+2(3x+2y)$ $3x+2y=22$ $x+y+3z+6x+4y=x+y+3z+2(3x+2y)=62$	2p 2p 1p
4.	*a)* f(2) = 3 ; g(2) = 3 $\begin{cases}2a+b=3\\a+2b=6\end{cases}$ $a=0;b=3$ f(x) = 3 ; g(x0 =3x - 3	2p 2p 1p
	b) Reprezentarea unui punct de pe grafic Reprezentarea altui punct de pe grafic Trasarea graficului (o dreaptă)	2p 1p 2p
	c) patrulaterul este ACOB- trapez dreptunghic OC =1 ; AB = 2; OB = 3 A_{ACOB} = 4,5	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* AB = AE = 20 m, EB = $20\sqrt{2}$ m ;A_{EBC} = 400 m^2; EC = 40 m;A_{ECD} = 800 m^2 A_{ABCDE} = 200 + 400 + 800 = 1400 m^2	3p 2p
	b) AB = AE = 20 m; BC = $20\sqrt{2}$ m; CD = 40 m; ED = $40\sqrt{2}$ m P_{ABCDE} = 80 + $60\sqrt{2}$ m.	3p 2p
	c) EA // DF; EA = DF = 20 m AFDE paralelogram.	3p 2p
2.	*a)* V = L.l.h ; V = 8.2,5.3 V= 60 m^3	3p 2p
	b) V_{cutie} = 0,5 .0,25 .0,6 = 0,075 m^3 60 : 0,075 = 800 cutii	3p 2p
	c) 800.2= 1600 bidoane cu apă 1600. 5 = 8000 l.	3p 2p

Scanned with OKEN Scanner

Testul 40

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	4	2	2300	$8\sqrt{3}$	25	29°C
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Desenează prisma Notează prisma.....	4p 1p
2.	59 –3 = 56 kg; 67 – 4 = 63 kg $56 = 2^3 .7$; $63 = 3^2 .7$ (56; 63) = 7 kg	2p 2p 1p
3.	$-7 \le 2x-5 \le 7; -2 \le 2x \le 12; -1 \le x \le 6$ $A=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ $-4 \le 4x+8 < 28; -12 \le 4x < 20; -3 \le x < 5$ $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ $A \cap B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, $A \setminus B = \{5,6\}$	2p 2p 1p
4.	*a)* f(2) = 7 ; f(-1) = - 8; $\begin{cases} 2a+b=7 \\ -a+b=-8 \end{cases}$ $a = 5$; $b = -3$	2p 2p 1p
	b) $f(x) = 5x - 3$ $y = 0$, $x = 3/5$ M(3/5;0) ; N(0;-3) $A = \frac{3}{5}.\frac{3}{2} = \frac{9}{10}$	1p 2p 2p
5.	$E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 - 3x^2 + 15$ $E(x) = x^2 + 6x + 11$ $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 5x + 12$; x = 1	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	*a)* AB = 12 m; BC = 4 m A_{ABCD} =AB.BC A_{ABCD} = 48 m^2	3p 2p
	b) $A_{cerc} = \pi r^2$ $A_{ronduri} = 2.4\pi = 8\pi$ $A_{ronduri} = 8.3{,}14 = 25{,}12$ A_{iarba}=48 –25,12 = 22,88 m^2	3p 2p
	c) 240 . 2 = 480 lalele; 180.2 = 360 pansele 480.3,5 +360 .2,5 =2580 lei	3p 2p
2.	*a)* V = L.l.h ; V = 6.5.4 V= 120 m^3	3p 2p
	b) 90000 l = 90000 dm^3 = 90 m^3 ; h_{apa} = 90 ; 30 = 3 m	3p 2p
	c) Prin 4 robinete curg 40 l / s 90000 / : 40 l / s = 2250 s = 37 min 3 s.	3p 2p

Scanned with OKEN Scanner